ಅಂಕಗಳ ಇತಿಹಾಸ

ಎಲ್. ಎನ್. ಚಕ್ರವರ್ತಿ

ಗೃಹ ಸರಸ್ವತೀ
ಗ್ರಂಥಮಾಲೆ

ಪ್ರಸಾರಾಂಗ

ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ

ಗೃಹಸರಸ್ವತೀ ಗ್ರಂಥಮಾಲೆ–೧೦

ಪ್ರಧಾನ ಸಂಪಾದಕರು

ಡಾ. ಕೆ. ವಿ. ಪುಟ್ಟಪ್ಪ, ಎಂ.ಎ., ಡಿ.ಲಿಟ್

ಅಂಕಗಳ ಇತಿಹಾಸ

ಗೃಹಸರಸ್ವತೀ ಗ್ರಂಥಮಾಲೆ–೧೦

ಅಂಕಗಳ ಇತಿಹಾಸ

ಎಲ್. ಎನ್. ಚಕ್ರವರ್ತಿ

ಪ್ರಸಾರಾಂಗ
ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ
೧೯೬೧

Ankagala Itihasa by Sri L. N. Chakravarthy; first Published by the Director, Prasaranga, University of Mysore, Manasagangotri, Mysore-6 ; 1971; Cr. octavo xviii+150 ; Price: Ordinary Rs. 3-00 and Special Rs. 5-00.

ಮೊದಲನೆಯ ಮುದ್ರಣ ೧೯೭೧

ಬೆಲೆ: ಸಾಧಾರಣ ಪ್ರತಿ ೩-೦೦
ಉತ್ತಮ ಪ್ರತಿ ೫-೦೦

ಪ್ರಕಾಶಕರು
ಡೈರೆಕ್ಟರ್, ಪ್ರಸಾರಾಂಗ, ಮಾನಸಗಂಗೋತ್ರಿ, ಮೈಸೂರು-೬
ಮುದ್ರಕರು: ಶೇಷಾದ್ರಿ ಪ್ರೆಸ್, ಮೈಸೂರು-೪

ಗೃಹಸರಸ್ವತೀ ಗ್ರಂಥಮಾಲೆಯನ್ನು ಕುರಿತು....

"ಪ್ರೌಢಶಿಕ್ಷಣದ ಗುರಿಗಳೇ ಬೇರೆ, ಜನಪ್ರಿಯ ಶಿಕ್ಷಣದ ಗುರಿಗಳೇ ಬೇರೆ; ಒಂದರ ಉದ್ದೇಶ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಬೆಳೆಸುವುದು, ಇನ್ನೊಂದರದು ಅದನ್ನು ಹರಡುವುದು ಮತ್ತು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದುಬಂದಿರುವ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಜನರ ಆಸಕ್ತಿಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸುವುದು" ಎಂದು ಲಾರ್ಡ್ ಮಾರ್ಲೇ 'ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಸಂಸ್ಕೃತಿ' ಎಂಬ ತನ್ನ ಪ್ರಬಂಧವೊಂದರಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದ್ದಾನೆ. ಇಂದಿನ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯಗಳ ಹೊಣೆಗಾರಿಕೆಗಳಲ್ಲಿ—ಅದರಲ್ಲೂ ನಮ್ಮಂತಹ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದುತ್ತಿರುವ ರಾಷ್ಟ್ರದಲ್ಲಿ—ಎರಡನೆಯ ಉದ್ದೇಶ ಮೊದಲಿನದರಷ್ಟೇ ಮಹತ್ವವನ್ನು ಪಡೆಯಬೇಕು. ಅಜ್ಞಾನ ತುಂಬಿಕೊಂಡಿರುವ ಸಮಾಜ ಸುತ್ತುವರಿದಿರುವ ಯಾವುದೇ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ ಕಲಿಕೆಯ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಊರ್ಜಿತವಾಗಲಾರದು. ಒಂದು ಕಡೆ ಅದು ಹೊಸ ಅರಿವಿನ ಅನ್ವೇಷಣೆಗೆ ಉತ್ತೇಜನ ಕೊಟ್ಟು ಅವುಗಳನ್ನು ಪ್ರೌಢಪ್ರಕಟಣೆಗಳು ಮತ್ತು ಉಪನ್ಯಾಸಗಳ ಮೂಲಕ ಬೆಳಕಿಗೆ ತರಬೇಕು. ಮತ್ತೊಂದು ಕಡೆ, ಯಾವುದೋ ಕಾರಣದಿಂದ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವನ್ನು ಹೊಗಲಾರದ ಜನರಿಗೆ ಅಂಥ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಹಂಚಬೇಕು. ಈ ಉದ್ದೇಶದ ಸಾಧನೆಗಾಗಿ ಮಹತ್ವಪೂರಿತವೂ ಆಸಕ್ತಿಕರವೂ ಆದ ವಿವಿಧ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಹೊಸ ಹೊಸ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ನಮ್ಮ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯಗಳು ಪ್ರಕಟಿಸಬೇಕು. ಇದರಿಂದ ಪ್ರೌಢಶಿಕ್ಷಣಕ್ಕಾಗಿ ತನ್ನಲ್ಲಿಗೆ ಬಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಹೊರಗೇ ಉಳಿಯುವ ಅವರ ತಂದೆತಾಯಿಗಳು, ಪೋಷಕರು ಮತ್ತು ಇತರ ಜನಸಮುದಾಯವನ್ನು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವು ಸುಶಿಕ್ಷಿತರನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದಂತಾಗುವುದು. ಮಾರ್ಲೆಯೇ ತನ್ನ ಪ್ರಬಂಧದ ಬೇರೊಂದು ಕಡೆ ಹೇಳುವಂತೆ, "ಯಾವ ಸಮಾಜದಲ್ಲಿ ಬಹುಜನರ ನೆಮ್ಮದಿ, ಆಸಕ್ತಿ, ಕುತೂಹಲ, ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಇವೆಲ್ಲವೂ ಅತ್ಯುನ್ನತವಾಗಿರುವುವೋ ಅಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಪ್ರತಿಭಾವಂತರ ನೈತಿಕ ಅಥವಾ ಬೌದ್ಧಿಕ ಶಕ್ತಿಗಳು ಅತ್ಯಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು. . . . ಮಾನವನನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪಸ್ವಲ್ಪವಾಗಿ ಅನಾಗರಿಕತೆ

ಯಿಂದ ದೇವತ್ವದ ಹತ್ತಿರಕ್ಕೆತ್ತಿರುವ ಕ್ರೈಸ್ತ ಮಠಗಳ ಸಂತ ಶ್ರೇಷ್ಠರ ಮತ್ತು ಇತರ ಸಾಧುವರ್ಯರ ಆಧ್ಯಾತ್ಮಿಕ ಮತ್ತು ಬೌದ್ಧಿಕ ಸಾಧನೆಗಳು ನಮ್ಮೆಲ್ಲರಿಂದಲೂ ಆಗದಿರಬಹುದು. ಆದರೆ ನಮ್ಮ ಶಕ್ತಿ ಯಿರುವಷ್ಟು ಮಟ್ಟಿಗೆ ನಮ್ಮ ಮನಸ್ಸನ್ನು ಕಾರ್ಯೋನ್ಮುಖಗೊಳಿಸಿಕೊಂಡು ನಮಗೆ ದೊರೆತ ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ಇತರರಿಗೆ ಹಂಚಲು ಪ್ರಾಮಾಣಿಕವಾಗಿ ಪ್ರಯತ್ನಿಸುವುದು ನಾವೆಲ್ಲರೂ ಮಾಡಬಹುದಾದ ಕೆಲಸ. ಯಾವುದರ ವಾಹಕ ಶಕ್ತಿ ಮತ್ತು ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿ ಮಾನವಜನಾಂಗದ ವೈಭವಪೂರ್ಣವಾದ ನೌಕಾಯಾನ ಯಶಸ್ವಿಯಾಗಿ ಸಾಗಬಲ್ಲುದೋ ಆ ಉಬ್ಬರವನ್ನು ಪೋಷಿಸಲು ಇಂತಹ ಕೆಲಸ ನೆರವಾಗಬಹುದು".

ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಪ್ರಸಾರಾಂಗ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿದ್ದ ಎರಡೂ ಉದ್ದೇಶಗಳನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಕಾರ್ಯತತ್ಪರವಾಗಿದೆ. ಐನೂರನ್ನು ಮೀರಿದ ತನ್ನ ಪ್ರೌಢಪ್ರಕಟಣೆಗಳು ಮತ್ತು ಜನಪ್ರಿಯವಾದ ಪ್ರಚಾರ ಪುಸ್ತಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಜ್ಞಾನದಾನವನ್ನು ಹೆಚ್ಚುಹೆಚ್ಚು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಜನರಿಗೆ ಅದು ನೀಡುತ್ತಿದೆ. ಇದೀಗ ಪ್ರಸಾರಾಂಗ ಹೊಸದೊಂದು ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಕೈಗೊಂಡಿದೆ. ಜ್ಞಾನದ ವಿವಿಧ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಪರಿಣತ ರಾದವರಿಂದ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿಸಿ "ಗೃಹಸರಸ್ವತೀ ಗ್ರಂಥಮಾಲೆ" ಎಂದು ಕರೆಯುವ ಮಾಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಿಸಲು ಉದ್ದೇಶಿಸಿದೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕಗಳು ಪ್ರಚಾರ ಪುಸ್ತಕಮಾಲೆಯ ಪುಸ್ತಕಗಳಿಗಿಂತ ದೊಡ್ಡವಾಗಿರು ತ್ತವೆ. ಸುಮಾರು 125ರಿಂದ 150 ಪುಟಗಳಿಂದ ಕೂಡಿರುತ್ತವೆ. ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಜ್ಞಾನದ ವಿವಿಧ ಶಾಖೋಪಶಾಖೆಗಳನ್ನು ಅವು ಒಳಗೊಳ್ಳು ತ್ತವೆ. ಸುಸಂಸ್ಕೃತ ವ್ಯಕ್ತಿಗೆ ಅತ್ಯಗತ್ಯವಾದ ತಿಳಿವಿನ ಎಲ್ಲ ವಿಭಾಗ ಗಳನ್ನೂ ಅವು ಒಳಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಉನ್ನತ ಶಿಕ್ಷಣವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಅವಕಾಶವನ್ನು ಹೊಂದದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜನರ ಜ್ಞಾನತೃಷೆಯನ್ನು ತೃಪ್ತಿ ಗೊಳಿಸುವುದು, ಇನ್ನೂ ಓದಬೇಕೆಂಬ ಆಸೆಯನ್ನು ಅವರಲ್ಲಿ ಕೆರಳಿಸುವುದು ಈ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಗುರಿ. ಶಾಲಾಕಾಲೇಜುಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಾವಧಿಯ ಶಿಕ್ಷಣ ಏನನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತದೆಯೋ ಅದನ್ನೇ ಅಲ್ಪಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಮನೆಮನೆ ಯಲ್ಲಿ ಈ ಪುಸ್ತಕಗಳು ಸಾಧಿಸುತ್ತವೆ—ಇಂಗ್ಲಿಷಿನಲ್ಲಿರುವ "ಹೋಂ

ಯೂನಿವರ್ಸಿಟಿ ಲೈಬ್ರರಿ" ಮಾಲಿಕೆಯ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಹಾಗೆ. ಆಧುನಿಕ ಕಾಲದ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವೆಂದರೆ, ಒಳ್ಳೆಯ ಗ್ರಂಥಭಂಡಾರ ಎಂಬ ಕಾರ್ಲೈಲನ ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ಅವು ಸಾರ್ಥಕಪಡಿಸುತ್ತವೆ. ಜನ ಸರಸ್ವತಿಯಿರುವೆಡೆಗೆ ಬರದೆ ಅಥವಾ ಬರಲಾರದೆ ಹೋದಾಗ ಸರಸ್ವತಿಯೇ ಜನರಿರುವೆಡೆಗೆ ಹೋಗಬೇಕು ಎಂದು ಸ್ವಾಮಿ ವಿವೇಕಾನಂದರು ಎಪ್ಪತ್ತೈದು ವರ್ಷಗಳಿಗೂ ಹಿಂದೆಯೇ ಹೇಳಿದರು. ಆ ಮಾತು ಇಂದೂ ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಗೃಹಸರಸ್ವತೀ ಗ್ರಂಥಮಾಲೆ ನಾಡಿನ ಗೃಹಸ್ಥರ ಮನೆಗಳತ್ತ ದೇವಿ ಶಾರದೆ ಇಡುವ ಪವಿತ್ರ ಹೆಜ್ಜೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಅವಳ ಗಮನದ ಗುರಿ ಕನ್ನಡನಾಡಿನ ಮನೆಮನೆಯ ಅಣ್ಣತಮ್ಮಂದಿರ, ಅಕ್ಕತಂಗಿಯರ, ಜ್ಞಾನಾರ್ಜನೆಗೆ ಸಾಕಷ್ಟು ಕಾಲವಾಗಲಿ ಅವಕಾಶವಾಗಲಿ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೂ "ಜಗತ್ತಿನಲ್ಲಿ ಬಂದಿರುವ ಅತ್ಯುತ್ತಮವಾದ ಆಲೋಚನೆಗಳನ್ನೂ, ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನೂ" ಅರಿಯಲು ಆಸಕ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವವರ ಮನೆಗಳು.

ಗೃಹಸರಸ್ವತೀ ಗ್ರಂಥಮಾಲೆಗಾಗಿ ನಾಡಿನ ಪ್ರಮುಖ ವಿದ್ವಾಂಸರುಗಳನ್ನು ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬರೆದುಕೊಡುವಂತೆ ಕೇಳಿಕೊಂಡಾಗ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸೂಚನೆಗಳನ್ನು ಅವರಿಗೆ ನೀಡಲಾಯಿತು.

೧. ಪುಸ್ತಕವು ಕ್ರೌನ್ ಅಷ್ಟಪತ್ರಾಕಾರದ 125ರಿಂದ 150 ಪುಟಗಳಷ್ಟು ಇರಬೇಕು.

೨. ಸುಮಾರಾಗಿ ಎಸ್.ಎಸ್.ಎಲ್.ಸಿ.ವರೆಗೆ ಓದಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯರ ತಿಳಿವಿಗೆ ನಿಲುಕುವಂತಿರಬೇಕು.

೩. ಸಾಹಿತ್ಯವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಬರೆಯುವಾಗ

  ಅ) ಕೇವಲ ಪ್ರೌಢವಿದ್ವಾಂಸರಿಗೆ ಆಸಕ್ತಿಯಿರುವ ಕಾಲ, ವಿಚಾರ ಮೂಲಗಳು, ತಂತ್ರಗಳು ಮುಂತಾದ ವಿವರಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟುಬಿಡಬಹುದು.

  ಆ) ಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಎದ್ದು ಕಾಣುವ ಸಾಹಿತ್ಯಿಕ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನೂ ಅದರ ವಿಶಿಷ್ಟ ಕೊಡುಗೆಯನ್ನೂ ಒತ್ತಿ ಹೇಳಬೇಕು.

೪. ಲೇಖಕರನ್ನು ಕುರಿತು ಬರೆಯುವಾಗ

ಅ) ಅವರ ಸಾಮಾಜಿಕ ಮತ್ತು ರಾಜಕೀಯ ಹಿನ್ನೆಲೆಯನ್ನು ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ ಚಿತ್ರಿಸಬೇಕು.

ಆ) ಅವರ ಜೀವನಚರಿತ್ರೆಯನ್ನು ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಬೇಕು.

ಇ) ಅವರ ಕೃತಿಗಳ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ತಾತ್ಪರ್ಯವನ್ನು ಕೊಡಬೇಕು.

ಈ) ಕೃತಿಗಳ ವಿಮರ್ಶಾತ್ಮಕ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನ ಇರಬೇಕು.

ಉ) ಲೇಖಕರ ಮುಖ್ಯ ಕೃತಿಗಳ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ಕೃತಿಗಳ ಪಟ್ಟಿ ಇರಬೇಕು.

೫. ವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಕಲಾ ವಿಭಾಗದ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವಾಗ

ಅ) ಜಟಿಲವೂ, ತಾಂತ್ರಿಕವೂ ಆದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ನಿವಾರಿಸಬೇಕು.

ಆ) ಚಾರಿತ್ರಿಕ ಮತ್ತು ಸಾಮಾಜಿಕ ಪ್ರಜ್ಞೆ, ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಮನೋಭಾವ ಮತ್ತು ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಚಿಂತನೆ ಇವುಗಳ ಬೆಳವಣಿಗೆಯನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ವಿಜ್ಞಾನದ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ ಹೇಳಬೇಕು.

ಈ ಸೂಚನೆಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ಲೇಖಕರು ಗೃಹಸರಸ್ವತೀ ಗ್ರಂಥಮಾಲೆಯ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಕನ್ನಡನಾಡಿನ ಜನಕೋಟಿ ಈ ನೂತನ ಮಾಲೆಯನ್ನು ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಸ್ವಾಗತಿಸಿ, ಅದರ ಪೂರ್ಣ ಪ್ರಯೋಜನವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತಾರೆಂದು ಆಶಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಭುಶಂಕರ
ಡೈರೆಕ್ಟರ್

ಮುನ್ನುಡಿ

ಪ್ರಾಚ್ಯ ಪಾಶ್ಚಾತ್ಯ ಶಿಕ್ಷಣತಜ್ಞರು ಕೂಲಂಕಷವಾಗಿ ವಿಚಾರ ನಡೆಸಿ ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಯೇ ಶಿಕ್ಷಣ ಮಾಧ್ಯಮವಾಗಬೇಕು ಎಂದು ಒಮ್ಮತದ ತೀರ್ಮಾನ ನೀಡಿರುವುದು ಸರ್ವ ವಿದಿತವಾಗಿದೆ. ಈ ನಿರ್ಧಾರವನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ ಮಾತ್ರವೇ ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಉಜ್ವಲವಾದ ಭವಿಷ್ಯವಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಮನಗಂಡ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯ ಸರಕಾರಗಳು ಈ ನಿಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ದಿಟ್ಟತನದಿಂದ ಹೆಜ್ಜೆಯಿಡುತ್ತಿವೆ. ಕೇಂದ್ರ ಸರಕಾರವು ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು, ಸಹಾಯಕ ಗ್ರಂಥಗಳು ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ರಚಿತವಾಗಲಿ ಎಂಬ ಆಶಯದಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಜ್ಯಸರ್ಕಾರದ ಮೂಲಕವೂ ಅಲ್ಲಿನ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಕೋಟಿ ರೂಪಾಯಿಗಳ ಸಹಾಯಧನವನ್ನು ನೀಡುವ ತೀರ್ಮಾನವನ್ನು ಕೈಗೊಂಡಾಗಿದೆ. ಆ ಹಣದ ವಿತರಣಕಾರ್ಯವೂ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿದೆ.

ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ ಕಳೆದ ಅನೇಕ ದಶಕಗಳಿಂದಲೂ ಈ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಗಣನೀಯವಾದ ಸಾಧನೆ ನಡೆಸಿದೆ. ಇಲ್ಲಿನ ಅನೇಕ ಕಾಲೇಜುಗಳಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆಯೆ ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮ ತೆರೆಯಲಾಯಿತು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮ ಆರಿಸಿಕೊಂಡು ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮಾಧ್ಯಮದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗಿಂತ ಉನ್ನತ ಮಟ್ಟದ ಪರಿಣತಿ ಪಡೆಯುವುದು ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ. ಮೈಸೂರಿನ ಒಂದು ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದ ವರ್ಷವೇ ಅದನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಂಡವರಲ್ಲಿ ನೂರಕ್ಕೆ ನೂರು ಜನ ತೇರ್ಗಡೆ ಹೊಂದಿದರು ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನೆಯುವುದರಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿವೇಕವಿದೆ. ಅದರ ಮರುವರ್ಷದಿಂದಲೂ ಆ ಕಾಲೇಜಿನ ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಶೇಕಡಾ 98ಕ್ಕೆ ಕಡಮೆಯಿಲ್ಲದಂತೆ ತೇರ್ಗಡೆ ಹೊಂದುತ್ತಲೆ ಬಂದಿದ್ದಾರೆ. ಅದೇ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮಾಧ್ಯಮ ಆರಿಸಿಕೊಂಡವರು ಶೇಕಡಾ

ಮೂವತ್ತು ಮೂವತ್ತೈದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ತೇರ್ಗಡೆ ಹೊಂದು ತ್ತಿಲ್ಲ ಎಂಬುದೂ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ವಿಷಯ.

ಈಗಂತೂ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಮೊದಲನೆಯ ತರಗತಿಯಿಂದ ಹಿಡಿದು ಎಂ.ಎ., ಎಂ.ಎಸ್‌ಸಿ, ಮುಂತಾದ ಸ್ನಾತಕೋತ್ತರ ತರಗತಿಯ ವರೆಗೂ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು, ಅವರು ಯಾವುದೇ ಭಾಷೆಯ ಮೂಲಕ ಶಿಕ್ಷಣ ಪಡೆದಿದ್ದರೂ, ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಉತ್ತರ ಬರೆಯಬಹುದು ಎಂದು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ ಅಪ್ಪಣೆ ಹೊರಡಿಸಿದೆ. ಆದರ ಪ್ರಕಾರ ಕೆಲವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸ್ನಾತಕೋತ್ತರ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲೂ ಕನ್ನಡದಲ್ಲೇ ಉತ್ತರ ಬರೆದು ಪ್ರಶಂಸನೀಯವಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ತೋರಿಸು ತ್ತಿದ್ದಾರೆ.

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳ ಅಭಾವ ಎಂಬುದು ಹಳಸಿದ ಮಾತಾಗಿ ಪರಿಣಮಿಸಿದೆ. ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ ತನ್ನ ಪ್ರಸಾರಾಂಗದ ಮೂಲಕ ಅನೇಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ವಿದ್ವಾಂಸರಿಂದ ಬರೆಸಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿದೆ. ಈ ಮಹೋನ್ನತ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ಮೈಸೂರು, ಬೆಂಗಳೂರು ಮತ್ತು ಕರ್ಣಾಟಕ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯಗಳು ಹಿಂದೆಂದೂ ಕಾಣದ ಭವ್ಯಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಕಾರ್ಯೋನ್ಮುಖವಾಗಿವೆ. ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ಸಂಸ್ಥೆ ಈಗಾಗಲೇ ನೂರಾರು ಸ್ನಾತಕ ಮತ್ತು ಸ್ನಾತಕೋತ್ತರ ಮಟ್ಟದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಗಳನ್ನೂ, ಸಹಾಯಕ ಗ್ರಂಥಗಳನ್ನೂ ನೂರಾರು ಜನ ಘನ ವಿದ್ವಾಂಸರ ನೆರವಿನಿಂದ ಸೃಷ್ಟಿಸುತ್ತಿದೆ. ಇತರ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾ ನಿಲಯಗಳ ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ಸಂಸ್ಥೆಗಳೂ ಇಂತಹ ಒಂದು ಶ್ಲಾಘನೀಯ ವಾದ ಉದ್ಯಮದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿವೆ. ಬೆಂಗಳೂರಿನ ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವೂ ಈ ನಿಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿರುವುದು ಸ್ವಾಗತಾರ್ಹವಾಗಿದೆ.

ಮಹಾತ್ಮಾಗಾಂಧೀಜಿಯವರು— ಭಾರತದ ಜನಕೋಟಿಯೊಂದಿಗೆ ಮತ್ತು ಅವರ ಸಮಸ್ಯೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಅವರಷ್ಟು ನಿಕಟವಾದ ಪರಿಚಯವನ್ನು ಹೊಂದಿ ಅವರಿಗಾಗಿಯೇ ಬಾಳಿದ ಶಿಕ್ಷಣತಜ್ಞರು ಮತ್ತೊಬ್ಬರಿರಲಾರರು. —ತಮ್ಮ ಖಡ್ಗ ತೀಕ್ಷ್ಣವೂ ತರ್ಕಬದ್ಧವೂ ಆದ ವಾಣಿಯಲ್ಲಿ ಸಾರಿ ಸಾರಿ ಹೇಳಿದರು, ದೇಶಭಾಷೆಗಳು ಶಿಕ್ಷಣ ಮಾಧ್ಯಮವಾದಾಗಲೇ ಭಾರತದಲ್ಲಿ

ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸ ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು. ಅವರ ಈ ಕೆಲವು ಮಾತುಗಳನ್ನು ಪರಿಭಾವಿಸಬೇಕು :

"........ಗಣಿತ, ರೇಖಾಗಣಿತ, ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ, ರಸಾಯನ ಶಾಸ್ತ್ರ, ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರ—ಈ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟನ್ನು ನಾನು ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತೆನೋ ಅಷ್ಟನ್ನು ಒಂದು ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಕಲಿಯಬಹು ದಾಗಿತ್ತು. ಇಂಗ್ಲಿಷಿನ ಮೂಲಕವಾಗಿಯೇ ಕಲಿಯದೆ ಗುಜರಾತಿಯ ಮೂಲಕ ಕಲಿತಿದ್ದರೆ, ಎಂದು ನಾನು ಈಗ ತಿಳಿದುಕೊಂಡಿದ್ದೇನೆ. ನಾನು ಆ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಗ್ರಹಿಸುವುದು ಇನ್ನೂ ಸುಲಭವಾಗಿರುತ್ತಿತ್ತು, ವಿಶದ ವಾಗಿರುತ್ತಿತ್ತು. ನನ್ನ ಗುಜರಾತಿ ಶಬ್ದಭಂಡಾರ ಇನ್ನೂ ವಿಪುಲ ವಾಗಿರುತ್ತಿತ್ತು. ನಾನು ಆ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಮನೆಯಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೊಳ್ಳಬಹುದಾಗಿತ್ತು. ಈ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮಾಧ್ಯಮ ನನಗೂ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಓದದೆ ಇದ್ದ ನನ್ನ ಮನೆಯವರಿಗೂ ನಡುವೆ ದಾಟಲಾಗದ ಅಡ್ಡಗೋಡೆಯನ್ನು ಹಾಕಿತು...........ನನ್ನ ಮನೆಯಲ್ಲಿಯೇ ನಾನು ಬಲು ಬೇಗನೆ 'ಪರಕೀಯ'ನಾಗುತ್ತಲಿದ್ದೆ.

"........ಶಿಕ್ಷಣ ಮಾಧ್ಯಮವನ್ನು ಕೂಡಲೇ, ಎಷ್ಟೇ ವೆಚ್ಚವಾಗಲಿ, ಬದಲಾಯಿಸಿ ಪ್ರಾಂತೀಯ ಭಾಷೆಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾದ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಕೊಡ ಬೇಕು. ಇದರಿಂದ ಉನ್ನತ ಶಿಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತಿರುವ ತಾತ್ಕಾಲಿಕ ಗೊಂದಲವನ್ನು ಕೂಡ, ಪ್ರತಿದಿನವೂ ಅಧಿಕವಾಗುತ್ತಿರುವ ದೋಷಯುಕ್ತ ಅಪವ್ಯಯಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ, ಸ್ವಾಗತಿಸು ತ್ತೇನೆ."

ಮಹಾತ್ಮಾ ಗಾಂಧಿಯವರ ಅನೇಕ ರಾಷ್ಟ್ರಹಿತ ಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಮೂಲೆಗುಂಪು ಮಾಡಿ ದೇಶಕ್ಕೆ ಹಾನಿಯನ್ನು ತರುತ್ತಿರುವ ವಿದ್ರೋಹಿ ಗಳಾದ ಅನೇಕರು ಅವರ ಈ ದೇಶಭಾಷಾ ಮಾಧ್ಯಮದ ಯೋಜನೆ ಯನ್ನೂ ಮೂಲೆಗೊತ್ತರಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಅದಕ್ಕೆ ಅವರು ಒಡ್ಡುವ ವಾದಗಳು ಹಾಸ್ಯಾಸ್ಪದವಾಗಿವೆ. "ದೇಶಭಾಷೆಗಳಲ್ಲೇ ಶಿಕ್ಷಣ ದೊರಕಿದರೆ ನಮಗೆ ಪರ ಪ್ರಾಂತಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಸಿಕ್ಕುವುದು ಹೇಗೆ?" ಇದು ಅಂಥವರ ಪ್ರಶ್ನೆ ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು. ಇಲ್ಲಿಂದ ಪರಪ್ರಾಂತಗಳಿಗೆ ಹೋಗಿಯೋ, ಪರಪ್ರಾಂತ

ಗಳಿಂದ ಇಲ್ಲಿಗೆ ಬಂದೋ ಹಿಂದೆ ಉದ್ಯೋಗ ದೊರಕಿಸಿಕೊಂಡವರು ಹಲವರು. ಆದರೆ ಅವರಿಗೆ ಉದ್ಯೋಗ ಸಿಕ್ಕಿದ್ದು ಅವರ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಜ್ಞಾನಕ್ಕಾಗಿಯಲ್ಲ. ಅವರಿಗಿದ್ದ ತಾಂತ್ರಿಕ ಮತ್ತಿತರ ವಿಶೇಷ ಜ್ಞಾನಕ್ಕಾಗಿ ಎಂಬುದನ್ನು ಅಂಥವರು ಮರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಆಗಲೂ ಇವರು ತಮ್ಮ ಮೇಲಧಿಕಾರಿಗಳೊಂದಿಗೂ, ಕೈಕೆಳಗಿನ ಅಧಿಕಾರಿಗಳೊಂದಿಗೂ ವ್ಯವಹಾರಕ್ಕಾಗಿ ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದ ಭಾಷೆ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಅಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಮರೆಯಬಾರದು. ಯಾವ ಪ್ರಾಂತದಲ್ಲಿ ಇವರು ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದರೋ ಆ ಪ್ರಾಂತ ಭಾಷೆಯನ್ನು ಮಾತಾಡುವಮಟ್ಟಿಗಾದರೂ ಇವರು ಕಲಿಯಲೇಬೇಕಾಗಿತ್ತು. ಹಾಗೆ ಅವರು ಕಲಿತ ಭಾಷೆಗಳಿಂದಲೇ ಅವರ ದಿನನಿತ್ಯದ ವ್ಯವಹಾರ ಸಾಗುತ್ತಿರುವುದು, ಮತ್ತು ಅವರ ತಾಂತ್ರಿಕ ಜ್ಞಾನದ ಸರಿಯಾದ ವಿನಿಯೋಗವೂ ನಡೆಯುತ್ತಿರುವುದು. ಇಷ್ಟಾದರೂ ಹೀಗೆ ಹೊರಗೆ ಹೋದ ಜನ ದೇಶಭಾಷಾ ಮಾಧ್ಯಮದ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ ಮಾತನ್ನಾಡುತ್ತಿರುವುದು ಅತ್ಯಂತ ಆಶ್ಚರ್ಯಕರವಾಗಿದೆ.

ಇಷ್ಟಕ್ಕೂ ಹೀಗೆ ಹೊರಗೆ ಹೋಗುತ್ತಿರುವ ತಜ್ಞರ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ ಎಷ್ಟು? ಬಹುಶಃ ಶೇಕಡಾ ಒಂದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಮೆ. ಹೀಗೆ ನೂರರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬ "ಪ್ರತಿಭಾವಂತ"ನ ಸಲುವಾಗಿ ತೊಂಬತ್ತೊಂಬತ್ತು ಜನರಿಗೆ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಭಾಷೆಯನ್ನು ಕಡ್ಡಾಯವಾಗಿ ಕಲಿಸಬೇಕು ಎಂಬುದು ಖಂಡನಾರ್ಹ.

ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೆ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಸಂದೇಹಗಳನ್ನು ನಿವಾರಿಸುವುದು ಅಗತ್ಯ. ತ್ರಿಭಾಷಾ ಸೂತ್ರ ಎಂಬುದು; ನಾನು ಹಿಂದೆಯೇ ಅನೇಕ ಕಡೆ ಹೇಳಿರುವಂತೆ, ಭಾರತೀಯರಿಗೆ ತ್ರಿಶೂಲಪ್ರಾಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಎಲ್ಲ ಭಾಷೆಗಳೂ ಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಎಂದರೆ, ಎಲ್ಲರೂ ಇಂಗ್ಲಿಷನ್ನಾಗಲಿ ಹಿಂದಿಯನ್ನಾಗಲಿ ಕಲಿಯಬೇಕಾದದ್ದು ಏಕೆ? ಯಾರಿಗೆ ಅಗತ್ಯವಿದೆಯೋ ಅಂಥವರು ಅವರಿಗೆ ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಭಾಷೆಯನ್ನು ಕಲಿಯಬಹುದು. ಇಂತಹ ಭಾಷೆಗಳನ್ನು ಶೀಘ್ರವಾಗಿ ಸಾಹಿತ್ಯದೃಷ್ಟಿಯಿಂದಲ್ಲದೆ ಭಾಷಾದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಬೋಧಿಸುವ ಕಾರ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ಭಾಷಾ ಸಂಸ್ಥೆಗಳ ಸ್ಥಾಪನೆಯಾಗಿದೆ. ಇನ್ನೂ ಚ್ಚಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಆಗಲಿದೆ. ಅಲ್ಲದೆ ತ್ರಿಭಾಷಾ ಸೂತ್ರವೇ ಏಕೆ?

ಭರತಖಂಡಕ್ಕೀಗ ಬೇಕಾಗಿರುವುದು ಬಹುಭಾಷಾಸೂತ್ರ. ನಮ್ಮ ಜನ ಕಲಿಯಬೇಕಾದದ್ದು ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಭಾಷೆಯೊಂದನ್ನು ಮಾತ್ರವಲ್ಲ. ರಷ್ಯನ್, ಜಪಾನೀ, ಜರ್ಮನ್, ಫ್ರೆಂಚ್ ಮುಂತಾದ ಅನೇಕ ಪ್ರೌಢಭಾಷೆಗಳನ್ನು ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಆವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗಾಗಿ ಕಲಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

ತ್ರಿಭಾಷಾ ಸೂತ್ರದ ಅಪಾಯ ಇಷ್ಟಕ್ಕೇ ಸೀಮಿತವಾಗಿಲ್ಲ. ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮತ್ತು ಅಂತರರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ರಾಜಕೀಯ ಕಾರಣಗಳಿಗಾಗಿ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮತ್ತು ಹಿಂದಿ ಭಾಷೆಗಳ ವೈಭವವನ್ನು ಏನೂ ಅರಿಯದ ನಮ್ಮ ಹಸುಳೆಗಳ ಮುಂದೆ ವರ್ಣಿಸಿ ಅವರ ಮನಸ್ಸನ್ನು ಅವುಗಳ ಕಡೆಗೇ ಎಳೆದು ದೇಶಭಾಷೆಗಳ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು ಹಿಂದಕ್ಕೊತ್ತರಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನವನ್ನೂ ಮಾಡುತ್ತಿರುವವರು ಅನೇಕರಿದ್ದಾರೆ.

ನನ್ನ ವಾದ ಇದು. ತ್ರಿಭಾಷಾ ಸೂತ್ರ ಎಂಬುದು ಭರತಖಂಡಕ್ಕೆ ಅತ್ಯಂತ ಅಪಾಯಕಾರಿಯಾದದ್ದು. ಅದರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರಬೇಕಾದದ್ದು ದ್ವಿಭಾಷಾ ಸೂತ್ರ. ಭರತಖಂಡದ ಯಾವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಮೇಲೂ ಯಾವ ಭಾಷೆಯನ್ನೂ ಬಲವಂತವಾಗಿ ಹೇರಬಾರದು ಎಂಬುದು ನನ್ನ ವಾದದ ಸಾರಾಂಶ. ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿದಂತೆ ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿ ನಡೆಯುತ್ತಿರುವ ವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ತಾಂತ್ರಿಕ ಪ್ರಗತಿಯ ಅರಿವಿಗೆ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಭಾಷೆಯ ಜ್ಞಾನವೊಂದೇ ಸಾಲದು. ಜರ್ಮನ್, ರಷ್ಯನ್ ಮುಂತಾದ ಭಾಷೆಗಳನ್ನೂ ನಮ್ಮ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕಲಿಯಬೇಕಾದದ್ದು ಅಗತ್ಯ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅನೇಕ ಭಾಷೆಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಮುಂದೆ ಇಟ್ಟು, ಅವರು ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಭಾಷೆಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಅವಕಾಶವನ್ನು ಅವರಿಗೆ ನೀಡಬೇಕು.

ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ರಾಜಕೀಯವಾಗಿಯೂ ದ್ವಿಭಾಷಾ ಸೂತ್ರವು ತ್ರಿಭಾಷಾ ಸೂತ್ರಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಪರಿಣಾಮಕಾರಿಯಾಗಿ ಪ್ರದೇಶ ಪ್ರದೇಶಗಳ ನಡುವಣ ಸ್ವಭಾಷಾಭಿಮಾನಜನ್ಯವಾದ ಭಾಷಾ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಸಹಾಯಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಭಾಷೆಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಎನ್ನುವುದರಿಂದ ಹಿಂದಿ ಬೇಡ ಎನ್ನುವವರಿಗೆ, ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಬೇಡ ಎನ್ನುವವರಿಗೆ, ಅವು

ಗಳನ್ನು ಬಲಾತ್ಕಾರವಾಗಿ ಹೇರಿದಂತಾಗುವುದಿಲ್ಲ; ನಿಷೇಧಿಸಿದಂತೆಯೂ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಮಹಾಜನರೇ ಕಾಲಕ್ರಮೇಣ, ತಮ್ಮ ತಮ್ಮ ಅಭಿರುಚಿ ಆವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಗೆ ತಕ್ಕಂತೆ ಹಿಂದಿ, ಇಂಗ್ಲಿಷ್, ರಷ್ಯನ್, ಸಂಸ್ಕೃತ ಮೊದಲಾದ ಭಾಷೆಗಳನ್ನು ಯಾವ ಶೇಕಡಾವಾರು ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಕಲಿಯಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ತಮಗೆ ತಾವೇ ಗೊತ್ತುಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ.

ಹಿಂದಿಯನ್ನಾದರೂ ಐವತ್ತು ಕೋಟಿ ಭಾರತೀಯರೂ ಕಲಿಯಬೇಕು ಎನ್ನುವ ವಾದದಲ್ಲಿ ಸಾಮ್ರಾಜ್ಯಶಾಹಿಯ ದಬ್ಬಾಳಿಕೆಯ ಮನೋಧರ್ಮವೊಂದನ್ನು ಬಿಟ್ಟರೆ, ಅರ್ಥವಿಲ್ಲ. ಶೇಕಡ ಒಂದರಷ್ಟು ಜನಕ್ಕೆ ಅರ್ಥಂಬರ್ಧ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಕಲಿಸಿ ಬ್ರಿಟಿಷರು ಇನ್ನೂರು ವರ್ಷಕ್ಕೂ ಮೇಲೆ ಸಮರ್ಥವಾಗಿ ರಾಜ್ಯಭಾರ ನಡೆಸಲಿಲ್ಲವೇ?

ಆದ್ದರಿಂದ "ಬಹುಭಾಷೆಗಳಲ್ಲಿ ದ್ವಿಭಾಷಾ" ಎಂಬುದೇ ನಮಗಿಂದು ಕ್ಷೇಮಕರ ಸೂತ್ರವಾಗಿದೆ.

ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವು ದ್ವಿಭಾಷಾ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅಂಗೀಕರಿಸಿ, ಇಡೀ ಭಾರತಕ್ಕೆ ಮಾರ್ಗದರ್ಶನ ನೀಡಿ, ಅಗ್ರೇಸರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿರುವುದು ನಮಗೆಲ್ಲ ಅಭಿಮಾನದ ಸಂಗತಿ.

ಅಧಿಕೃತ ರಾಷ್ಟ್ರಭಾಷೆಯ ಪ್ರಶ್ನೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಅಖಂಡ ಭಾರತಕೆ ಒಂದು ರಾಷ್ಟ್ರಭಾಷೆ ಅಗತ್ಯ. ಬಹುಜನರು ಯಾವುದು ರಾಷ್ಟ್ರಭಾಷೆಯೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತಾರೋ ಅದನ್ನು ವ್ಯವಹಾರದ ಮಟ್ಟಿಗೆ, ಎಲ್ಲರೂ ಅಲ್ಲ, ಅವಶ್ಯವಿದ್ದಷ್ಟು ಜನರು ಅವರೇ ನಿರ್ಣಯಿಸಿಕೊಂಡಂತೆ, ಕಲಿಯುವುದು ಸೂಕ್ತ. ಆದರೆ ಅದನ್ನು ಕೂಡ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಆಯ್ಕೆಗೆ ಬಿಡಬೇಕೆಂಬುದೇ ನನ್ನ ಅಭಿಪ್ರಾಯ.

ಇನ್ನೊಂದು ವಾದವನ್ನು ಮುಂದೊಡ್ಡುವ ಜ್ಞಾನಿಗಳ ಒಂದು ಗುಂಪಿದೆ. ಅದು ಒಂದು ಪ್ರಾಂತದ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ ಮತ್ತೊಂದು ಪ್ರಾಂತದ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಅಧ್ಯಾಪಕರನ್ನು ನೇಮಕ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವ ವಿಷಯ, ನನ್ನ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಸೇವೆಯ ದೀರ್ಘ ಇತಿಹಾಸದಲ್ಲಿ ಹೊರಗಿನ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯಗಳಿಂದ ಇಲ್ಲಿಗೆ ಆಹ್ವಾನಿಸಿದ ಪ್ರತಿಭಾ ಪುರುಷರ ಸಂಖ್ಯೆ ಕೈ ಬೆರಳುಗಳಲ್ಲಿ ಎಣಿಸಬಹುದಾದಷ್ಟು, ಇಲ್ಲಿಂದ

ಬೇರೆ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯಗಳಿಗೆ ಹೋದವರ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಇದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನದಾಗಿರಲಾರದು. ಈಗಂತೂ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಾಂತವೂ ತನ್ನಲ್ಲಿಯ ಪ್ರತಿಭಾಶಾಲಿಗಳಿಗೇ ಉದ್ಯೋಗ ಒದಗಿಸಲು ಅಸಮರ್ಥವಾಗಿರುವಾಗ ಇನ್ನು ಹೊರಪ್ರಾಂತಗಳಿಂದ ಪ್ರತಿಭಾವಂತರನ್ನು ಸ್ವಾಗತಿಸಿ ಅವರನ್ನು ಪೀಠಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಷ್ಠಾಪಿಸುವ ಮಾತು ಎಲ್ಲಿಂದ ಬಂತು? ಒಂದುವೇಳೆ ಅಂತಹ ಪ್ರಸಂಗ ಒದಗಿದರೆ ಹೀಗೆ ತಮ್ಮ ತಮ್ಮ ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ 'ವಿಶೇಷ ಪ್ರತಿಭಾವಂತ'ರಾಗಿರುವರು ಬೇರೆ ಪ್ರಾಂತದ ಭಾಷೆಯನ್ನು ವ್ಯವಹಾರದ ಮಟ್ಟಿಗಾದರೂ ಶೀಘ್ರವಾಗಿ ಕಲಿತುಕೊಳ್ಳುವ ಶಕ್ತಿಯನ್ನೂ ಪಡೆದೇ ಇರುತ್ತಾರೆ. ಆದುದರಿಂದ ಇಂತಹ ಅಪೂರ್ವ ಪ್ರಸಂಗಗಳನ್ನು ಎದುರಿಸಲು, ಅಂದರೆ ಲಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬರಿಗೆ ಅನುಕೂಲ ಮಾಡಿಕೊಡಲು, ಲಕ್ಷಾಂತರ ಜನರನ್ನು ಇಂಗ್ಲಿಷಿನ ಬಲಿಪೀಠದ ಮೇಲೆ ವಧೆ ಮಾಡುವುದು ಸರಿಯಲ್ಲವೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

ಅಲ್ಲದೆ ಈಗ ವಾದ ಮಾಡುತ್ತಿರುವವರಲ್ಲಿ ಅನೇಕರದು ಅರ್ಧ ಶತಮಾನದ ಹಿಂದಿನ ಜ್ಞಾನ. ಐವತ್ತು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ನಾವೆಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ ಕೂಡ ಜ್ಞಾನದ ಪ್ರಮುಖ ಶಾಖೆಗಳಿಗೆಲ್ಲ ಪ್ರವೇಶವಿದ್ದದ್ದು ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಭಾಷೆಯ ಮೂಲಕವೇ. ಈಗ ಹಾಗಲ್ಲ. ನನಗೆ ತಿಳಿದಂತೆ ಕನ್ನಡದ ಮೂಲಕವಾಗಿ ಜ್ಞಾನದ ಯಾವ ಶಾಖೆಯನ್ನಾದರೂ ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಗ್ರಂಥರಚನೆ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ನಡೆದಿದೆ. ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ ತನ್ನ ಪ್ರಸಾರಾಂಗದ ಮೂಲಕ ಪ್ರಕಟಿಸಲಿರುವ "ಮುದ್ರಿತ ಕನ್ನಡ ಕೃತಿಗಳ ವಿವರಣಾತ್ಮಕ ಗ್ರಂಥಸೂಚಿ" ಹೊರಬಂದಾಗ ಈ ಮಾತಿನ ಅರ್ಥ ಮನದಟ್ಟಾದೀತು.

ಮಹಾತ್ಮಾ ಗಾಂಧೀಜಿಯವರು ಸಾರಿ ಸಾರಿ ಹೇಳಿದಂತೆ, ಇತರ ಶಿಕ್ಷಣತಜ್ಞರು ತರ್ಕಬದ್ಧವಾಗಿ ಮಂಡಿಸಿ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದಂತೆ, ದೇಶಭಾಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಶಿಕ್ಷಣ ದೊರೆಯದಿದ್ದರೆ, ಈಗಾಗುತ್ತಿರುವಂತೆ, ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸ ಮರಳಿನ ಮೇಲೆ ಕಟ್ಟಿದ ಸೌಧವಾಗುತ್ತದೆ. ವಿಜ್ಞಾನವನ್ನೂ ತಾಂತ್ರಿಕ ಜ್ಞಾನವನ್ನೂ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಹೇಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದು ಮಂದಮತಿಗಳ, ಆಲಸ ದುರ್ಬಲರ ಮತ್ತು ವಿದ್ಯಾದ್ರೋಹಿಗಳ ಕನವರಿಕೆ ಮತ್ತು ಅತ್ಯಂತ

ಹಾಸ್ಯಾಸ್ಪದವಾದ ತಲೆಹರಟೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಮ್ಮ ವಿದ್ವಾಂಸರು ತಮ್ಮ ಕನ್ನಡ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಮತ್ತು ಮಾನವಿಕ ಗ್ರಂಥಗಳ ಮೂಲಕ ಸಾರಿ ಹೇಳಿದ್ದಾಗಿದೆ. ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳ ಅಭಾವವೇ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ರಚನೆಗೆ ಮತ್ತು ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯೆಯನ್ನು ಬೋಧಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಇರುವ ದೊಡ್ಡ ಅಡ್ಡಿ ಎಂಬ ಪೇಶಲವಾದ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಗಮನಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದದ್ದೇ ಇಲ್ಲ. ಅದಷ್ಟುಮಟ್ಟಿಗೆ ಅಂತರ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳನ್ನು ಹಾಗೆಯೇ ಉಳಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ಅನಕ್ಕೆ ತದ್ಭವ–ತತ್ಸಮಗಳನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ಶ್ರಮದಿಂದ ಸೃಷ್ಟಿಸುವುದೂ ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ನಮ್ಮ ವಿಜ್ಞಾನ ಲೇಖಕರು ತೋರಿಸಿ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ. ಪ್ರಬುದ್ಧ ಕರ್ಣಾಟಕವು ತನ್ನ ಚಿನ್ನದ ಹಬ್ಬದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿರುವ ೧೬೦೦ ಪುಟಗಳ ವಿಜ್ಞಾನ ವಿಶೇಷಾಂಕ ಇಂತಹ ಎಲ್ಲ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಸಶಕ್ತವೂ ಸಚಿತ್ರವೂ ಆದ ಪರಿಹಾರ ರೂಪವಾಗಿ ನಿಂತಿದೆ.

ತನ್ನ ಅನೇಕ ಮಾಲಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಪ್ರಸಾರಾಂಗ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾ ನಿಲಯದ ಅಧ್ಯಾಪಕರ ಮತ್ತು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಉಪಯೋಗಕ್ಕಾಗಿ ಅನೇಕ ಸಹಾಯಕ ಗ್ರಂಥಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸುವುದರ ಜೊತೆಗೆ ಜನಸಾಮಾನ್ಯರ ಜ್ಞಾನತೃಷೆಯನ್ನು ಪೂರೈಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಕೂಡ ಅನೇಕ ಗ್ರಂಥಗಳನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಹೊರಬರುತ್ತಿರುವ ಶ್ರೀ ಎಲ್. ಎನ್. ಚಕ್ರವರ್ತಿ ಅವರ 'ಅಂಕಗಳ ಇತಿಹಾಸ' ಓದುಗರಿಗೆ ತುಂಬ ಉಪಯುಕ್ತವೂ, ಪ್ರಿಯವೂ ಆಗುತ್ತದೆಂದು ಆಶಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಕೆ. ವಿ. ಪುಟ್ಟಪ್ಪ
ಪ್ರಧಾನ ಸಂಪಾದಕ

ಅರಿಕೆ

ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಕೇತಗಳೇ ಅಂಕಗಳು. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ಈ ಹತ್ತು ಗುರುತುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಈಗ ನಾವು ಎಂಥ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾದರೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ಈ ಪದ್ಧತಿ ಎರಡು ಸಾವಿರ ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ತಿಳಿದಿರಲಿಲ್ಲ. ಪ್ರಪಂಚದಾದ್ಯಂತ ಈ ಪದ್ಧತಿ ಬಳಕೆಗೆ ಬಂದುದು ಕೇವಲ ಮೂರು ನಾಲ್ಕು ಶತಮಾನಗಳ ಹಿಂದೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯ ಆವಿಷ್ಕರಣದ ಹಿನ್ನೆಲೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಿದ್ದೇನೆ. ಇದನ್ನು ಗೃಹಸರಸ್ವತೀ ಗ್ರಂಥಮಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಿಸಲು ಒಪ್ಪಿದ್ದಕ್ಕಾಗಿ ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಪ್ರಸಾರಾಂಗದ ಪ್ರಧಾನ ನಿರ್ದೇಶಕರಾದ ಡಾ. ಪ್ರಭುಶಂಕರ ಅವರಿಗೂ ಮತ್ತು ಸಹನಿರ್ದೇಶಕರಾದ ಶ್ರೀ ಆರ್. ಎಲ್. ಅನಂತರಾಮಯ್ಯ ಅವರಿಗೂ ನನ್ನ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳು.

ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ ಉದ್ಯೋಗಕ್ಕೆ ತೊಡಗಲು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹೆಜ್ಜೆಯಲ್ಲಿಯೂ ನನಗೆ ಪ್ರೋತ್ಸಾಹ ನೀಡುತ್ತಿರುವ ನನ್ನ ಮಿತ್ರರಾದ ಶ್ರೀ ಜೆ. ಆರ್. ಲಕ್ಷ್ಮಣರಾಯರನ್ನು ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಸ್ಮರಿಸಬೇಕು. ಅವರ ಪ್ರಚೋದನೆ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ವಿಷಯಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ ಯತ್ನವನ್ನು ನಾನು ಮಾಡುತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ. ಈ ಅಂಕಗಳ ಇತಿಹಾಸಕ್ಕೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಇತಿಹಾಸವನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಆಗ್ರಹ ಮಾಡಿದವರು ಮಿತ್ರರಾದ ಶ್ರೀ ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾಯರು. ಇವರು ಹಸ್ತಪ್ರತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ ನೀಡಿದ ಸಲಹೆಗಳಿಗೆ ನಾನು ಚಿರಋಣಿ. ಅಲ್ಪ ಕಾಲಾವಕಾಶದಲ್ಲಿಯೇ ಅಂದವಾಗಿ ಮುದ್ರಿಸಿ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ, ಶೇಷಾದ್ರಿ ಪ್ರೆಸ್‌ನ ಮಾಲೀಕರು, ಅವರಿಗೆ ನನ್ನ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳು.

ಗಣಿತ ವಿಭಾಗ
ಯುವರಾಜಾ ಕಾಲೇಜು
ಮೈಸೂರು
ಜನವರಿ 4, 1971

ಎಲ್. ಎನ್. ಚಕ್ರವರ್ತಿ

ಅಂಕಗಳ ಇತಿಹಾಸ

ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಮಾನವನ ಸೃಷ್ಟಿಯೊಂದಿಗೆ ಪ್ರಾಯಶಃ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸೃಷ್ಟಿಯೂ ಆಗಿರಬೇಕು. ಮಾನವ ಅನಾಗರಿಕನಾಗಿದ್ದಾಗಲೇ ಅವನು ತನ್ನಲ್ಲಿರುವ ಪದಾರ್ಥಗಳನ್ನು ಎಣಿಸುವಾಗ ಒಂದು, ಎರಡು, ಮೂರು, ನಾಲ್ಕು ಮುಂತಾದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಉತ್ಪತ್ತಿಯಾದುವು. ಒಬ್ಬ ಕೆಲವು ಕುರಿಗಳನ್ನು ಸಾಕಿದ್ದರೆ, ತನ್ನ ಹತ್ತಿರ ಎಷ್ಟು ಕುರಿಗಳಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಅವುಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಲು ಆರಂಭಿಸಿದಾಗ ಒಂದು, ಎರಡು, ಮೂರು, ನಾಲ್ಕು, ಐದು ಮುಂತಾದ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಉತ್ಪನ್ನವಾದುವು. ಆದ್ದರಿಂದಲೇ ಈ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ನೈಸರ್ಗಿಕವಾಗಿ ಉತ್ಪನ್ನವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಥವಾ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (natural numbers) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎಣಿಸುವಾಗ, ಒಂದರಿಂದ ಹತ್ತರವರೆಗೆ, ಹತ್ತರಿಂದ ಇಪ್ಪತ್ತರವರೆಗೆ, ಹತ್ತು ಹತ್ತಾಗಿಯೇ ಎಣಿಸುತ್ತೇವಲ್ಲ! ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣವೇನಿರಬಹುದು? ಎಣಿಸುವ ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಈಗಲೂ ನಾವು ನಮ್ಮ ಕೈಯಲ್ಲಿರುವ ಬೆರಳುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಮ್ಮ ಒಂದೊಂದು ಕೈಯಲ್ಲೂ ಐದು ಬೆರಳುಗಳಿದ್ದು ಎರಡೂ ಕೈಗಳಿಂದ ನಮಗೆ ಹತ್ತು ಬೆರಳುಗಳಿರುವುದೇ ನಾವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹತ್ತು, ಇಪ್ಪತ್ತು ಅಥವಾ ಎರಡು ಹತ್ತು, ಮೂವತ್ತು ಅಥವಾ ಮೂರು ಹತ್ತು ಹೀಗೆ ಹತ್ತರ ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ಎಣಿಸಲು ಕಾರಣವಾಗಿದೆ.

ಒಂದು, ಎರಡು, ಮೂರು, ನಾಲ್ಕು ಎಂದು ಆರಂಭಿಸಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎಣಿಸುತ್ತ ಹೋದರೆ, ಹತ್ತಾದ ಮೇಲೆ ಹನ್ನೊಂದು, ಹನ್ನೆರಡು, ಹಾಗೆಯೇ ನೂರು, ನೂರೊಂದು ಅಲ್ಲಿಂದ ಸಾವಿರ ಹೀಗೆ ಮೇಲಿಂದ ಮೇಲೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬೆಳೆಯುತ್ತಲೇ ಇರುತ್ತವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೂ ಅನುಗಾಮಿಯಾಗಿ ಅದಕ್ಕೆ ಒಂದನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ

ಬರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತವೆ. ಸಾವಿರದ ವರೆಗೆ ಎಣಿಸಿದ ಅನಂತರ ಅದರ ಮುಂದಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಾವಿರದ ಒಂದು. ಅದರ ಮುಂದಿನದು ಸಾವಿರದ ಎರಡು. ಹೀಗೆ ಈ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅನಂತವಾಗಿ ಬೆಳೆಯುತ್ತಲೇ ಹೋಗುವುದು. ಎಂದರೆ ಎಲ್ಲ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಗಳಿಗಿಂತಲೂ ದೊಡ್ಡದಾದ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಇಲ್ಲ. ಎಷ್ಟೇ ದೊಡ್ಡ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ನಾವು ಬರೆದರೂ ಅದಕ್ಕೆ ಒಂದನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ ಬರುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮೊದಲು ಬರೆದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ದಾಗಿರುವುದು. ಮನೆಯಲ್ಲಿ ತಾಯಿ ದೋಸೆ ಮಾಡುತ್ತಿರುವಾಗ ಮಕ್ಕಳು ಒಬ್ಬೊಬ್ಬರಿಗೂ ಎಷ್ಟು ದೋಸೆ ಬೇಕೆಂಬ ವಿಷಯವಾಗಿ ತಮ್ಮ ತಮ್ಮಲ್ಲಿಯೇ ಜಗಳವಾಡುವುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಿದ್ದೇವೆ ಒಂದು ಮಗು ತನಗೆ ಎರಡು ದೋಸೆ ಬೇಕೆಂದರೆ, ಮತ್ತೊಂದು ಮಗು "ನನಗೆ ಮೂರು ದೋಸೆ ಬೇಕು ಕಾಣೋ" ಎನ್ನಬಹುದು. ಮತ್ತೊಂದು ತನಗೆ ನಾಲ್ಕು ಬೇಕು ಎನ್ನಬಹುದು. ಇನ್ನೊಂದು ಮಗು "ನೀನು ಎಷ್ಟು ಹೇಳುವಿಯೋ ಅದರ ಮೇಲೆ ಒಂದು ನನಗೆ ಬೇಕು" ಎನ್ನಬಹುದು. ಈ ಮಗುವೇ ಅವರಲ್ಲೆಲ್ಲ ಅತಿ ಬುದ್ಧಿವಂತನೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಇವನ ಮಾತು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಎಣಿಸುತ್ತ ಹೋದರೆ ಅವಕ್ಕೆ ಕೊನೆಯಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿಶದಪಡಿಸುವುದು.

ಹೀಗೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅನಂತವಾಗಿದ್ದರೂ ಅವುಗಳನ್ನು ಎಣಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನವನ್ನು ಕೈಗೆ ನಿಲುಕುವಷ್ಟು ಮನುಷ್ಯ ಮಾಡುತ್ತಲೆ ಇದ್ದಾನೆ. ತೈತ್ತಿರೀಯೋಪನಿಷತ್ತಿನಲ್ಲಿ ಆನಂದವಲ್ಲಿ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಭಾಗ. ಪರಬ್ರಹ್ಮ ನಿರತಿಶಯ ಆನಂದ ಸ್ವರೂಪ. ಇವನ ಆನಂದವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವೇ! ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಅದು ಎಷ್ಟು ಅಪರಿಮಿತ ಎಂಬುದನ್ನು ಬುದ್ಧಿಗೆ ನಿಲುಕುವ ಹಾಗೆ ಮಾಡಲು, ಅವನ ಆನಂದವನ್ನು ಅಳತೆಮಾಡುವ ಒಂದು ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಿದೆ. ಯಾವುದನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಬೇಕಾದರೂ ಒಂದು ಮೂಲಮಾನ ಬೇಕು. ಒಂದು ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಸುವ ಅಕ್ಕಿಯ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಒಂದು ಸೇರು ಎಂದು ಕರೆದರೆ, ಒಂದು ಮೂಟೆಯಲ್ಲಿ ನೂರು ಸೇರು ಅಕ್ಕಿ ಇದೆ ಎಂದು

ಹೇಳಿದಾಗ ಮೂಟೆಯಲ್ಲಿರುವ ಅಕ್ಕಿ ಪಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಸುವ ಅಕ್ಕಿಯ ನೂರರಷ್ಟಿದೆ ಎಂದರ್ಥ.

ಪರಬ್ರಹ್ಮನ ಆನಂದದ ಅಳತೆಗಾಗಿ ಇಲ್ಲಿ ಆರಿಸಿಕೊಂಡ ಮೂಲ ಮಾನವನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಸೈಷಾ ಆನಂದಸ್ಯ ಮೀಮಾಗ್ಂಸಾ ಭವತಿ
ಯುವಾಸ್ಯಾತ್ ಸಾಧು ಯುವಾಧ್ಯಾಯಿಕಃ
ಆಶಿಷ್ಠೋ ದೃಢಿಷ್ಠೋ ಬಲಿಷ್ಠಃ
ತಸ್ಯೇಯಂ ಪೃಥಿವೀ ಸರ್ವಾ ವಿತ್ತಸ್ಯ ಪೂರ್ಣಾಸ್ಯಾತ್
ಸ ಏಕೋ ಮಾನುಷ ಆನಂದಃ

ಒಳ್ಳೆಯ ಯುವಕನೊಬ್ಬನು ಭೂಮಿಯಲ್ಲಿದ್ದಾನೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಅವನು ಜ್ಞಾನ ಸಂಪನ್ನನಾಗಿದ್ದು ದೃಢಕಾಯನೂ ಬಲಿಷ್ಠನೂ ಆಗಿರಲಿ. ಸಕಲೈಶ್ವರ್ಯದಿಂದ ಕೂಡಿದ ಈ ಭೂಮಿಗೆ ಅವನು ಒಡೆಯನಾಗಿದ್ದರೆ ಅವನ ಆನಂದವನ್ನು ಒಂದು ಮನುಷ್ಯಾನಂದವೆಂದು ಕರೆಯೋಣ.

ಇಂಥ ಮನುಷ್ಯಾನಂದದ ನೂರರಷ್ಟು ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯಗಂಧರ್ವನ ಆನಂದ. ಇದರ ನೂರರಷ್ಟು ಆನಂದ ಒಬ್ಬ ದೇವಗಂಧರ್ವನ ಆನಂದ. ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದೆ ಮುಂದೆ ದೇವ ಗಂಧರ್ವರು, ಪಿತೃಗಳು, ಆಜಾನಜರೆಂಬ ದೇವತೆಗಳು, ಕರ್ಮದೇವತೆಗಳು, ದೇವತೆಗಳು, ಇವರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬರ ಆನಂದ ಹಿಂದೆ ಹೇಳಿದವರ ಆನಂದದ ನೂರರಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ. ನೂರು ದೇವತೆಗಳ ಆನಂದ ಇಂದ್ರನ ಆನಂದಕ್ಕೂ, ನೂರು ಇಂದ್ರರ ಆನಂದ ಬೃಹಸ್ಪತಿಯ ಆನಂದಕ್ಕೂ ಸಮನಾಗಿದ್ದು, ಬೃಹಸ್ಪತಿಯ ನೂರರಷ್ಟು ಆನಂದ ಪ್ರಜಾಪತಿ ಅಥವಾ ಚತುರ್ಮುಖ ಬ್ರಹ್ಮನಿಗೆ ಇರುವುದು. ಈ ಚತುರ್ಮುಖನ ಆನಂದದ ನೂರರಷ್ಟು ಪರಬ್ರಹ್ಮನ ಆನಂದವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದೇನೋ. ಈ ಗಣನೆಯ ಪ್ರಕಾರ ಮನುಷ್ಯನ ಆನಂದವನ್ನು ಒಂದು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದರೆ ಮನುಷ್ಯಗಂಧರ್ವನ

ಆನಂದ 100, ದೇವಗಂಧರ್ವನ ಆನಂದ 100^2 (100×100 ಅಥವಾ 10,000), ಹೀಗೆಯೇ ಪರಬ್ರಹ್ಮನ ಆನಂದ 100^{10} ಅಥವಾ 10^{20} ಮನುಷ್ಯಾನಂದಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗುವುದು. ಏಕ, ದಶ, ಶತ ಎಂದು ಹತ್ತರ ಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ಎಣಿಸುತ್ತ ಹೋದರೆ ಇಪ್ಪತ್ತೊಂದು ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಎಣಿಸಿದಂತೆ ಆಗುವುದು. ಇಲ್ಲಿ ಪರಬ್ರಹ್ಮನ ಆನಂದವನ್ನು ಎಣಿಸಿದಂತೆ ಅಭಿಪ್ರಾಯವಲ್ಲ. ನಿರತಿಶಯವಾದ ಆನಂದದ ಅಪರಿಮಿತತೆಯನ್ನು ಮನಸ್ಸಿಗೆ ತೋರಿಸಿಕೊಡುವ ಪ್ರಯತ್ನವೊಂದು ಇಲ್ಲಿ ನಡೆದಿದೆ. ಅದೇ ಆನಂದವಲ್ಲಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದೆ

ಯತೋ ವಾಚೋ ನಿವರ್ತಂತೇ
ಅಪ್ರಾಪ್ಯಮನಸಾಸಹ

ಎಂದು ಹೇಳಿದೆ. ಎಂದರೆ, ಪರಬ್ರಹ್ಮನ ಆನಂದವನ್ನು ಇಷ್ಟು ಎಂದು ನಿರ್ಣಯ ಮಾಡಲು ಹೊರಟು ಅದರ ಆನಂತ್ಯದ ದೆಸೆಯಿಂದ, ಮಾತು ಮತ್ತು ಮನಸ್ಸು ಅದರ ಇಯತ್ತೆಯನ್ನು ಗ್ರಹಿಸಲು ಅಶಕ್ತವಾದವುಗಳಾಗಿ ಹಿಂತಿರುಗುತ್ತವೆ ಎಂದು ಇದರ ಅರ್ಥ. ಇದು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಅನಂತದ (infinity) ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಅರುಹುವ ಒಂದು ಸೊಗಸಾದ ಉದಾಹರಣೆ.

ಹೀಗೆ ಹತ್ತರ ಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ಏಕ, ದಶ, ಶತ, ಸಹಸ್ರ ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗಿ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಎಣಿಸುತ್ತ ಹೋದರೆ ಅದಕ್ಕೆ ಅಂತ್ಯವಿಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಯಾವ ಯಾವ ಜನಾಂಗದವರು ಎಷ್ಟು ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರು ಎಂಬುದನ್ನು ವಿಮರ್ಶಿಸೋಣ. ಗ್ರೀಕರು ದಶಸಹಸ್ರದವರೆಗೆ ಮಾತ್ರ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರು. ಇವರು ಹತ್ತು ಸಾವಿರಕ್ಕೆ (ದಶ ಸಹಸ್ರ) ಮಿರಿಯಡ್ ಎನ್ನುತ್ತಿದ್ದರು. ರೋಮನ್ ಜನಾಂಗದವರು ಸಾವಿರಕ್ಕೆ ಮೇಲ್ಪಟ್ಟು ಹೆಸರು ಕೊಟ್ಟಿರಲಿಲ್ಲ. ಈಗಲೂ ಪಾಶ್ಚಾತ್ಯ ದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಹತ್ತು ಲಕ್ಷವನ್ನು ಮಿಲಿಯನ್ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಅನಂತರ ಬಿಲಿಯನ್, ಟ್ರಿಲಿಯನ್ನುಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟರೆ ಬೇರೆ ಹೆಸರುಗಳು ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಹಿಂದೂ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಜಹಳ ಹಿಂದಿನ ಕಾಲದಿಂದಲೂ

ಏಕ, ದಶ, ಶತ ಮುಂತಾದ ಹೆಸರುಗಳಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ಹದಿನೆಂಟು ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆಂದು ಸಂಶೋಧನೆಗಳಿಂದ ತಿಳಿಯುಬರುವುದು.

ಭಾರತದ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಮೊದಲನೇ ಹದಿನೆಂಟು ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಮುಂದೆ ಕಂಡಂತೆ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರು: ಏಕ, ದಶ, ಶತ, ಸಹಸ್ರ, ಅಯುತ, ಲಕ್ಷ, ಪ್ರಯುತ, ಕೋಟಿ, ಅರ್ಬುದ, ಅಬ್ಜ, ಖರ್ವ, ನಿಖರ್ವ, ಮಹಾಸರೋಜ, ಶಂಖು, ಸರಿತಾಪತ್ತಿ, ಅಂತ್ಯ, ಮಧ್ಯ ಮತ್ತು ಪರಾರ್ಧ. ಶುಕ್ಲ ಯಜುರ್ವೇದ ಸಂಹಿತೆಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಹದಿಮೂರು ಸ್ಥಾನಗಳ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಸೂಚಿಸಿದೆ:

ಏಕ, ದಶ, ಶತ, ಸಹಸ್ರ, ಅಯುತ, ನಿಯುತ, ಪ್ರಯುತ, ಅರ್ಬುದ, ನ್ಯರ್ಬುದ, ಸಮುದ್ರ, ಮಧ್ಯ, ಅಂತ ಮತ್ತು ಪರಾರ್ಧ.

ಭಾರತದ ಪ್ರಾಚೀನ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಕೃತಿಗಳೂ ಕೆಲವು ಬೌದ್ಧ ಗ್ರಂಥಗಳೂ ಐವತ್ತುಮೂರು ಸ್ಥಾನಗಳ ವರೆಗೆ ಹೆಸರಿಸಿವೆ.

ಅಂಕಗಳ ಇತಿಹಾಸ

ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಈಗ ನಾವು ಕೇವಲ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ಎಂಬ ಹತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಒಂದನೆಯ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಓದುವ ಹುಡುಗನೂ ಕೂಡ ಎಷ್ಟು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾದರೂ ಅಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಲ್ಲ. ಆದರೆ ಈ ಪದ್ಧತಿ ಬಳಕೆಗೆ ಬಂದು ಕೇವಲ ಎರಡು ಸಾವಿರ ವರ್ಷಗಳು ಮಾತ್ರ ಆಗಿವೆ ಎಂದರೆ ಆಶ್ಚರ್ಯವಾಗಬಹುದು. ಇಂಥ ಸುಲಭವಾದ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮಾನವ ಪಟ್ಟ ಕಷ್ಟಗಳೇನು? ಈ ಕ್ರಮ ಬಳಕೆಗೆ ಬರುವುದಕ್ಕೆ ಮುಂಚೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಜನಾಂಗಗಳು ಯಾವ ಯಾವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತಿದ್ದರು ಇವೇ ಮುಂತಾದ ವಿಚಾರಗಳ ವಿಮರ್ಶೆಯೇ ಈ ಲೇಖನದ ಮುಖ್ಯವಾದ ಉದ್ದೇಶ.

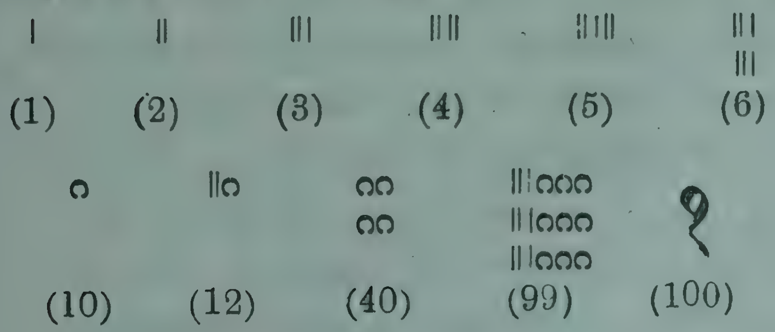
ಇತಿಹಾಸ ಎಂದರೆ ಇತಿ-ಹ-ಆಸ—ಹೀಗಲ್ಲವೇ ಇತ್ತು ಎಂದು ಅರ್ಥ. ನಾವು ಬರೆಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಕಾಗದಕ್ಕೂ ಒಂದು ಇತಿಹಾಸವಿದೆ. ಮುಂಚೆ ನಾವು ತಾಳೆಗರಿಯ ಮೇಲೆ ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದೆವು. ಕಾಲಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಕಾಗದ, ಮಸಿ, ಲೇಖನಿ ಇವುಗಳ ಆವಿರ್ಭಾವವಾಯಿತು. ಅಚ್ಚುಮಾಡುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಮೇಲಂತೂ ಬರೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸಾಧನಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಆಂದೋಳನವೇ ಉಂಟಾಯಿತು. ಮನುಷ್ಯ ಬುದ್ಧಿಜೀವಿ. ಇತರ ಪ್ರಾಣಿಗಳಿಂದ ನಾವು ಮನುಷ್ಯನನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸುವುದು ಅವನಿಗಿರುವ ಅಸಾಧಾರಣವಾದ ಬುದ್ಧಿಯಿಂದಲೇ. ಮನುಷ್ಯ ಉಡಲು ಈಗ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಬಟ್ಟೆಗಳನ್ನು ಆದಿ ಮಾನವನ ಉಡುಪುಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದರೆ ಮನುಷ್ಯನ ಉಡುಪೂ ಕೂಡ ತನ್ನದೇ ಆದ ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಇತಿಹಾಸವನ್ನೇ ಹೇಳುತ್ತಿದೆ ಎನ್ನಬಹುದಲ್ಲವೇ! ಹೀಗೆಯೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಮಾನವ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಚಾರಿತ್ರಿಕ

ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ವಿಮರ್ಶಿಸಿದರೆ, ಈ ಅಂಕಗಳೂ ತಮ್ಮವೇ ಆದ ಒಂದು ಇತಿಹಾಸವನ್ನು ಹೇಳುತ್ತವೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಈಗಿನ ಪರಿಪಕ್ವವಾದ ಸಂಕೇತ ಕ್ರಮದ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಮಾನವ ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಅನುಭವಿಸಿದ ಅಪಾರವಾದ ಪರಿಶ್ರಮವೂ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಪರಿಶ್ರಮವನ್ನು ಅಂಬೆಗಾಲಿಟ್ಟು ಕೂತು, ಗೋಡೆ ಮುಂತಾದ ಆಸರೆಗಳಿಂದ ಮೆಲ್ಲಗೆ ಎದ್ದು, ಹಾಗೆ ಏಳುವಾಗ ಬಿದ್ದು, ಅನಂತರ ಸರಾಗವಾಗಿ ನಡೆಯಲು ಕಲಿಯುವ ಒಂದು ಮಗುವಿನ ಪರಿಶ್ರಮಕ್ಕೆ ಹೋಲಿಸಬಹುದು.

ಪುರಾತನ ಕಾಲದ ಶಾಸನಗಳಿಂದಲೂ ತಾಮ್ರದ ತಗಡುಗಳ ಮೇಲೆ ಸಿಕ್ಕಿರುವ ಬರವಣಿಗೆಗಳಿಂದಲೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಜನಾಂಗಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಯಾವ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದರು ಎಂಬುದನ್ನು ಇತಿಹಾಸ ಸಂಶೋಧಕರು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದಾರೆ. ಹಾಗೆ ತಿಳಿದುಬಂದ ಕೆಲವು ದೇಶದ ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ಮುಂದೆ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿದೆ.

1 ಈಜಿಪ್ಟ್ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿದ್ದ ಪದ್ಧತಿ (ಹೀರೋಗ್ಲಿಫ್ ಕ್ರಮ)

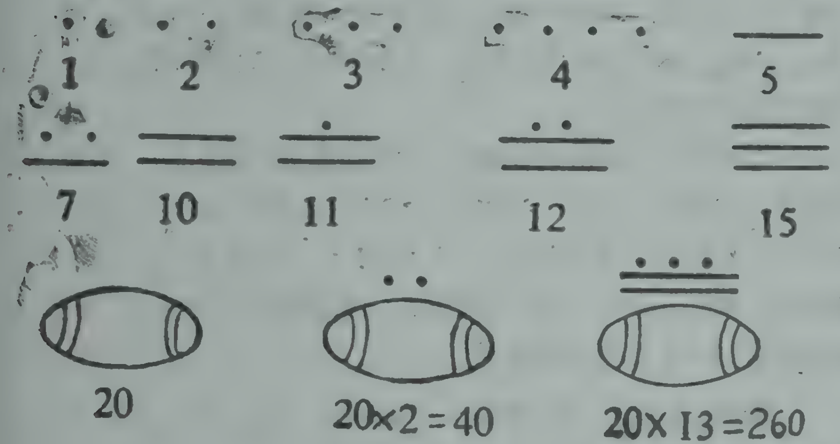
ಈಜಿಪ್ಟ್ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಸಿಕ್ಕಿದ ಪುರಾತನ ಶಾಸನಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಳಗೆ ಕಂಡಂತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ. (ಚಿತ್ರ 1)



ಚಿತ್ರ 1

ಒಂದು, ಎರಡು, ಮೂರು ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಉದ್ದನೆಯ ಗೀಟುಗಳು ಹಾಲು ಮೊಸರು ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಬರೆಯಲು ಕೆಲವು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಹೆಂಗಸರು ಮನೆಯ ಗೋಡೆಗಳ ಮೇಲೆ ಎಳೆಯುತ್ತಿದ್ದ ಗೀಟುಗಳನ್ನು ಜ್ಞಾಪಕಕ್ಕೆ ತರುತ್ತವೆ. ಈಗ ಗೃಹಿಣಿಯರೆಲ್ಲರೂ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಸುಶಿಕ್ಷಿತರು. ಆದ್ದರಿಂದ ಹಾಲು ಮೊಸರು ಲೆಕ್ಕಕ್ಕೋಸ್ಕರ ಅವರು ಈಗ ಗೋಡೆಯಮೇಲೆ ಗೀಟುಗಳನ್ನಾಗಲೀ ಬೊಟ್ಟುಗಳನ್ನಾಗಲೀ ಹಾಕುವುದಿಲ್ಲ. ಈಜಿಪ್ಟ ಜನಾಂಗದವರ ಈ ಸಂಕೇತ ಕ್ರಮ ಅಷ್ಟು ಸಮರ್ಪಕವಾದುದಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ಯಾರಾದರೂ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಒಂದರಿಂದ ಹತ್ತರವರೆಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ಬರೀ ಗೀಟುಗಳನ್ನೇ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಹತ್ತನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಹತ್ತು ಗೀಟುಗಳನ್ನು ಎಳೆಯುವ ಬದಲು ಒಂದು ಹೊಸ ಗುರುತನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವುದು ಮಾನವನಿಗೆ ದೇವರು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬುದ್ಧಿಯನ್ನು ಸ್ವಲ್ಪ ತಡವಾಗಿಯಾದರೂ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದುದರ ಕುರುಹು ಎನ್ನಬಹುದು. ಹನ್ನೊಂದರಿಂದ ತೊಂಬತ್ತೊಂಬತ್ತರ ವರೆಗಿರುವ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಒಂದರ ಗುರುತು ಮತ್ತು ಹತ್ತನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಗುರುತು ಇವೆರಡರ ಸಹಾಯದಿಂದಲೇ ಸೂಚಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಹನ್ನೆರಡನ್ನೂ ತೊಂಬತ್ತೊಂಬತ್ತನ್ನೂ ಬರೆದಿರುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಅನಂತರ ನೂರನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಒಂದು ಹೊಸ ಗುರುತಿರುವುದು ಈ ಕ್ರಮದ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯ. ಅಂತೂ ಒಂದು ಗೀಟು, ಹತ್ತರ ಒಂದು ಸಂಕೇತ, ನೂರರ ಒಂದು ಸಂಕೇತ, ಈ ಮೂರು ಅಂಕಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದಲೇ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದರು. ನಾಗರಿಕತೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಬೆಳೆದಿಲ್ಲದೆ ಇದ್ದುದರಿಂದ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಳಸುವ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಇವರಿಗೆ ಇರಲಿಲ್ಲವೆಂದು ತೋರುವುದು.

2 ಯುಕಟಾನ್ ಪ್ರಾಂತದ ಮಾಯ ಜನಾಂಗದವರು ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದ ಸಂಕೇತಗಳು



ಚಿತ್ರ 2

ಹಾಲು ಮೊಸರಿನ ಲೆಕ್ಕಕ್ಕೆ ಹಾಕುವ ಬೊಟ್ಟುಗಳಂತೆ ಒಂದರಿಂದ ನಾಲ್ಕರ ವರೆಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬೊಟ್ಟುಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದೆ. ಮುಂಚೆ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಿದ ಹೀರೋಗ್ಲಿಫ್ (ಈಜಿಪ್ಟ್) ಕ್ರಮಕ್ಕಿಂತ ಮಾಯ ಜನಾಂಗದವರ ಈ ಕ್ರಮ ಸ್ವಲ್ಪ ಉತ್ತಮವಾಗಿದೆ ಹೀರೋಗ್ಲಿಫ್ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಒಂದು, ಹತ್ತು, ನೂರು ಈ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಮೂರು ಗುರುತುಗಳಿವೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಒಂದರಿಂದ ಹತ್ತರವರೆಗೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರಿಯ ಉದ್ದನೆಯ ಗೀಟುಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಸೂಚಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಆದರೆ ಮಾಯ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಐದನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಐದು ಬೊಟ್ಟುಗಳನ್ನು ಹಾಕುವ ಬದಲು ಒಂದು ಹೊಸ ಸಂಕೇತವನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದ್ದಾರೆ (ಚಿತ್ರ 2). ಇಪ್ಪತ್ತನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಮಾಯ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹೊಸ ಗುರುತಿರುವುದು ಮತ್ತೊಂದು ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯ.

ಈ ಎರಡು ಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಚಿಕ್ಕ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನಾಗಿ ಭಾವಿಸಿ, ಇಂಥ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಅಂಕಗಳಿಂದ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ. ಇದನ್ನು ಸಂಕಲನ ತತ್ತ್ವ (additive

principle) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಹೀರೋಗ್ಲಿಫ್ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಹನ್ನೆರಡನ್ನು ಹತ್ತು ಮತ್ತು ಎರಡು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುರುತುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಬರೆದು ಸೂಚಿಸಿದೆ. ಹೀಗೆಯೇ ನಲವತ್ತು ಮತ್ತು ತೊಂಬತ್ತೊಂಬತ್ತು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದಿರುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಒಂದನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಿ.

ಮಾಯು ಜನಾಂಗದವರು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಹತ್ತನ್ನು ಎರಡು ಐದು ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ ಎರಡು ಅಡ್ಡಗೀಟುಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಹತ್ತನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದೆ. ಹೀಗೆಯೇ ಹದಿನೈದನ್ನು ಬರೆಯಲು ಮೂರು ಅಡ್ಡಗೀಟುಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. ಇವೆಲ್ಲವೂ ಸಂಕಲನ ತತ್ತ್ವದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರೂಪಿತವಾಗಿವೆ.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಸಂಕಲನ ತತ್ತ್ವದೊಂದಿಗೆ ಗುಣನ ತತ್ತ್ವವನ್ನು (multiplicative principle) ಕೆಲವರು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಮಾಯ ಜನಾಂಗದ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಇಪ್ಪತ್ತರ ಗುರುತಿನ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಚುಕ್ಕೆಗಳನ್ನು ಇಟ್ಟಾಗ ಅದು 20+2 ಅಥವಾ 22ನ್ನು ಸೂಚಿಸದೆ 20×2 ಅಥವಾ 40ನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಹಾಗೆಯೇ ಇನ್ನೂರ ಅರವತ್ತನ್ನು ಇಪ್ಪತ್ತು ಮತ್ತು ಹದಿಮೂರರ ಗುಣಲಬ್ಧವೆಂದು ಭಾವಿಸಿ ಇಪ್ಪತ್ತರ ಗುರುತಿನ ಮೇಲೆ ಹದಿಮೂರರ ಗುರುತನ್ನು ಬರೆದು ಸೂಚಿಸಿದ್ದಾರೆ (ಚಿತ್ರ 2). ಇನ್ನೂ ಮುಂದೆ ಹೇಳಿರುವ ಕೆಲವು ಪದ್ಧತಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ ತತ್ತ್ವ ಮತ್ತು ಗುಣನ ತತ್ತ್ವಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುವುದು.

ಮಾಯು ಜನಾಂಗದವರು ದಕ್ಷಿಣ ಅಮೆರಿಕದ ಯುಕಟಾನ್ ಪ್ರಾಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ವಾಸಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆಂದು ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ. ಯುಕಟಾನ್ ಈಗಿನ ಮೆಕ್ಸಿಕೋ ದೇಶದ ಒಂದು ಭಾಗವಾಗಿತ್ತು. ಸ್ಪೈನ್ ದೇಶದವರು ಹದಿನಾರನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲಿಗೆ ಬಂದಾಗ ಪಾಳುಬಿದ್ದ ಸುಮಾರು ಅರುವತ್ತು ನಗರಗಳನ್ನು ನೋಡಿದರಂತೆ. ಆ ನಗರಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಮಾಯು ಜನಾಂಗದವರು ಕಟ್ಟಿದ್ದರು. ಅವು ಇದ್ದ ಸ್ಥಿತಿಯಿಂದ ಈ ಜನಾಂಗದವರ ನಾಗರಿಕತೆ ಬಹಳ ಉಚ್ಛ್ರಾಯ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿದ್ದಿರಬೇಕೆಂದು ಊಹಿಸಬಹು

ದಾಗಿತ್ತಂತೆ. ಪ್ರಪಂಚದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಹತ್ತರ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರೂಪಿತವಾಗಿದ್ದ ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಮಗಳು ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿದ್ದಿದ್ದರೆ ಮಾಯಜನಾಂಗದವರು ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದ ಕ್ರಮ ಇಪ್ಪತ್ತರ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರೂಪಿತವಾಗಿತ್ತು. ಎರಡು ಕೈಗಳಲ್ಲಿರುವ ಹತ್ತು ಬೆರಳುಗಳೊಂದಿಗೆ ಎರಡು ಕಾಲುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಹತ್ತು ಬೆರಳುಗಳನ್ನೂ ಇವರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದುದರಿಂದ ಇವರ ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಮ ಇಪ್ಪತ್ತರ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರೂಪಿತವಾಗಿರಬೇಕೆಂದು ಊಹಿಸಬಹುದು.

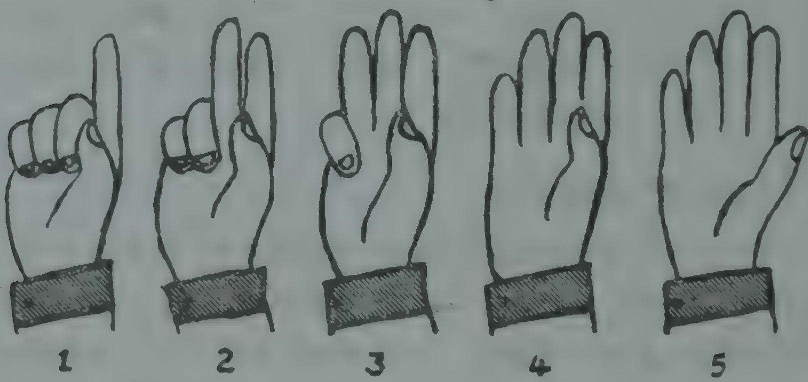
3 ರೋಮನ್ ಅಂಕಗಳು

ರೋಮನ್ ಜನರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಗುರುತುಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಡಿಜಿಟಸ್ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಿದ್ದರು. ಡಿಜಿಟಸ್ ಎಂದರೆ ಬೆರಳು ಎಂದು ಅರ್ಥ. ಈಗ ಆಂಗ್ಲಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಳಿಗೆ ಡಿಜಿಟ್ ಎನ್ನುವ ಪದವೂ ಇದರಿಂದಲೇ ಬಂದದ್ದು. ಎಣಿಸಲು ಬೆರಳುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು ಮಾನವನಿಗೆ ಸಹಜವಾದ ಪ್ರವೃತ್ತಿ. ಒಂದರಿಂದ ನಾಲ್ಕರ ವರೆಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬೆರಳಿನ ಆಕಾರವನ್ನು ಹೋಲುವ ಗೀಟುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ.

I	II	III	IIII ಅಥವಾ IV	V	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	
VI	VII	VIII	VIIII ಅಥವಾ IX	X	
(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	
XI	XII	XV	XX	XL	L
(11)	(12)	(15)	(20)	(40)	(50)
C	M				
(100)	(1000)				

ಚಿತ್ರ 3

ಐದನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಅಂಗೈಯ್ಯ ಆಕಾರ ಅಂದರೆ ಒಂದು ಕೈಯನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಬಿಚ್ಚಿದಾಗ ಹೆಬ್ಬೆರಳು ಮತ್ತು ತೋರು ಬೆರಳುಗಳು ಸೇರಿ ಮಾಡುವ ಆಕಾರವನ್ನು ಹೋಲುವ ಒಂದು ಸಂಕೇತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ. ಮೂರನೇ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೇ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ನೋಡಿ.



ಚಿತ್ರ 4

ಒಂದು ಕೈಯಲ್ಲಿ ಐದು ಬೆರಳುಗಳಿರುವುದರಿಂದ ಐದನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಅಂಗೈಯ್ಯ ಆಕಾರವನ್ನು ಹೋಲುವ ಗುರುತನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದಾರೆ. ನಾಲ್ಕನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ನಾಲ್ಕು ಗೀಟುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದರೂ ಸ್ವಲ್ಪಕಾಲದ ಮೇಲೆ ನಾಲ್ಕನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಐದರ ಗುರುತಿನ ಹಿಂದೆ ಒಂದು ಗೀಟನ್ನು ಹಾಕುವ ಪದ್ಧತಿ ಆರಂಭವಾಯಿತು :

$$\mathrm{IV} = 5 - 1 = 4$$
$$\mathrm{VI} = 5 + 1 = 6$$

ಐದರ ಗುರುತಿನ ಮುಂದೆ ಒಂದು ಗೀಟು ಹಾಕಿದರೆ ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಆರನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು ಎಂದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ಸಂಕಲನ ತತ್ತ್ವ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನ ತತ್ತ್ವಗಳನ್ನು (additive and subtractive principles) ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಮೂರನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಏಳು, ಎಂಟು ಒಂಬತ್ತು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದಿರುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಅನಂತರ ಹತ್ತನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹೊಸ ಗುರುತನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ. ಎರಡು ಕೈಗಳಲ್ಲಿರುವ ಬೆರಳುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹತ್ತು. ಒಂದೊಂದು ಕೈಯಲ್ಲಿಯೂ ಐದು ಬೆರಳುಗಳವೆ—ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಕೈಗಳ ಗುರುತನ್ನು ಅಥವಾ ಎರಡು ಸಾರಿ ಐದರ V ಈ ಗುರುತನ್ನು ಒಂದರ ಕೆಳಗೆ ಒಂದರಂತೆ $\overset{V}{\Lambda}$ ಹೀಗೆ ಬರೆದು ಅಥವಾ X ಈ ಗುರುತಿನಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಹತ್ತರ ಗುರುತಿನ ಬಲಕ್ಕೆ ಎರಡು ಗೀಟನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಹನ್ನೆರಡು (10+2) ಹತ್ತರ ಗುರುತಿನ ಎಡಕ್ಕೆ ಒಂದು ಗೀಟನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಒಂಬತ್ತು (10−1).

ನೂರು ಎನ್ನುವುದಕ್ಕೆ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಸೆಂಟಂ (centum) ಎನ್ನುತ್ತಿದ್ದರು. ಈ ಪದದ ಮೊದಲನೇ ಅಕ್ಷರವಾದ Cಯುನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ನೂರರ ಸಂಕೇತವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಗುರುತನ್ನು ಕಲ್ಲಿನ ಮೇಲೆ ಶಾಸನಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವಾಗ [ಹೀಗೆ ಕೆತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಇದನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗ ಮಾಡಿ [ಈಗ ಇದರ ಕೆಳಭಾಗವಾದ L ಎಂಬ ಗುರುತನ್ನು ಐವತ್ತನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದಾರೆ ಈ ಗುರುತಿನ ಎಡಕ್ಕೆ ಹತ್ತರ ಗುರುತನ್ನು ಬರೆದಾಗ ನಲವತ್ತು ಆಗುತ್ತದೆ. (XL=50−10=40). ಇಲ್ಲಿ ಸಂಕೇತ ಕ್ರಮ ವ್ಯವಕಲನ ತತ್ತ್ವವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ.

ನೂರರಿಂದ ಸಾವಿರದವರೆಗೆ ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಇನ್ನು ಯಾವ ಹೊಸಗುರುತುಗಳೂ ಇಲ್ಲ. ಈ ಗುರುತುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದಲೇ ಸಾವಿರಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆ ಇರುವ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದರು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: CXXVII = 100+20+7=127

CCCXXVI = 300+20+6=326

ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ MILLE ಎಂದರೆ ಸಾವಿರ. ಈ ಪದದ ಮೊದಲನೇ ಅಕ್ಷರವಾದ M ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾವಿರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಕೆಲವು ಕಡೆ ಸಾವಿರವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ϕ ಎಂಬ ಗುರುತನ್ನು ಬಳಸಿದ್ದಾರೆ. ಇದೇ ಗುರುತು C|Ɔ ಮುಂತಾದ ವಿಕಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿ

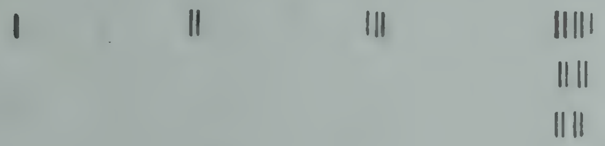
M ಎಂಬ ರೂಪವನ್ನು ಪಡೆದಿರಬೇಕೆಂದು ಊಹಿಸುತ್ತಾರೆ. ಈ ಗುರುತಿನ ಬಲಭಾಗವಾದ ।) ಅಥವಾ D ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಐನೂರನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. 1735 ನೇ ಇಸವಿಯಲ್ಲಿ ಅಚ್ಚಾದ ಸುಟೋನಿಯುಸ್ ಎಂಬುವನ ಪುಸ್ತಕದ ಮೇಲೆ ಆ ವರ್ಷದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು MDCCXXXV ಈ ರೀತಿ ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ.

ಇಷ್ಟು ಗುರುತುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದರು. ವಿಮರ್ಶೆಮಾಡಿ ನೋಡಿದರೆ ಈ ಪದ್ಧತಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಅಷ್ಟೇನೂ ಸಮರ್ಪಕವಾಗಿಲ್ಲ. ಆದರೂ ಈಗಲೂ ಕೂಡ ನಾವು ಒಂದು ಪುಸ್ತಕದ ಮುನ್ನುಡಿಯ ಪುಟಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಾಗ ಅಥವಾ ಪ್ರಶ್ನಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಾಗ ಇದೇ ರೋಮನ್ ಅಂಕಗಳನ್ನೇ ಇನ್ನೂ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ.

4 ಖರೋಷ್ಠೀ ಮತ್ತು ಬ್ರಾಹ್ಮೀ ಅಂಕಗಳು

ಮೊಹೆಂಜೋದಾರೋ ಮತ್ತು ಹರಪ್ಪದ ಸಂಶೋಧನೆಗಳಿಂದ ಭರತಖಂಡದಲ್ಲಿ ಕ್ರಿ ಪೂ. 3000ದಲ್ಲಿಯೂ ನಾಗರಿಕತೆ ಉಚ್ಛ್ರಾಯ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿತ್ತೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಅವಶೇಷಗಳಿಂದ ಜನರು ಕಟ್ಟಡಗಳನ್ನು ಕಟ್ಟಲು ಆಗಲೇ ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆಂದೂ ಚಿನ್ನ, ಬೆಳ್ಳಿ ಮುಂತಾದ ಲೋಹಗಳಿಂದ ಪಾತ್ರೆಗಳನ್ನು ಮಾಡುತಿದ್ದರೆಂದೂ ಗೊತ್ತಾಗುವುದು. ಇದೇ ಕಾಲಕ್ಕೆ ಅಥವಾ ಇನ್ನೂ ಹಿಂದಿನ ಕಾಲಕ್ಕೆ ಸೇರಿದ ವೇದಗಳಲ್ಲಿ ದೇವತೆಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಯಜ್ಞ ಯಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡುವ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಬೋಧಿಸಿದೆ. ಈ ಯಜ್ಞಗಳನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ಹೋಮಮಾಡಲು ವೇದಿಕೆಗಳನ್ನು ಕಟ್ಟಬೇಕಾಗುವುದು. ನಾನಾ ರೀತಿಯ ವೇದಿಕೆಗಳನ್ನು ಕಟ್ಟುವ ಪ್ರಕಾರವನ್ನು ವೇದಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ಆಗಿನ ಕಾಲದ ಜನರಿಗೆ ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ರೇಖಾಗಣಿತ ಮುಂತಾದ ಗಣಿತದ ಶಾಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಪರಿಶ್ರಮವಿದ್ದಿರಬೇಕೆಂದು ಕಂಡುಬರುವುದು.

ಮೊಹೆಂಜೋದಾರೋನಲ್ಲಿ ಸಿಕ್ಕಿದ ಅವಶೇಷಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರಿಂದ ಹದಿಮೂರರ ವರೆಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆದಿದೆ.



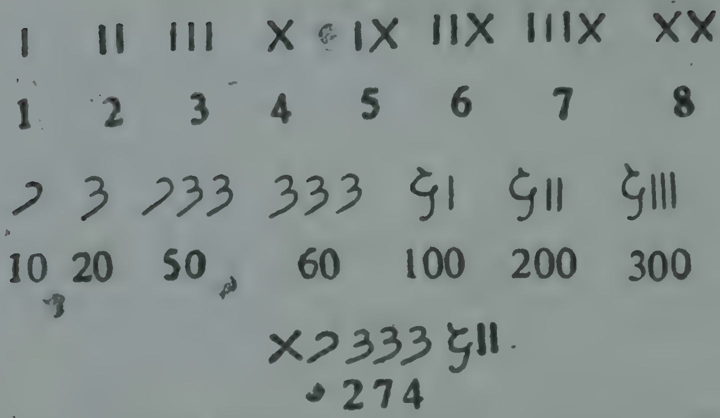
(1) (2) (3) (13)

ಚಿತ್ರ 5

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಉದ್ದವಾದ ಗೀಟುಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ. ಹದಿಮೂರಕ್ಕಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಬೇರೆ ಗುರುತುಗಳು ಇದ್ದಿರಬಹುದು. ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಸಿಕ್ಕಿದ ಅವಶೇಷಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಸಿರುವ ಲಿಪಿಯನ್ನೂ ಭಾಷೆಯನ್ನೂ ಇದುವರೆಗೆ ಯಾರೂ ಓದಲು ಸಮರ್ಥರಾಗಿಲ್ಲ. ಈಚೆಗೆ ಸ್ವೀಡನಿನ ಕೆಲವು ಸಂಶೋಧಕರೂ ಕೆಲವು ಭಾರತೀಯರೂ ಈ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರುವುದು ಆಶಾದಾಯಕವಾದ ಸಂಗತಿ.

ಈ ನಾಗರಿಕತೆಯ ಕಾಲದಿಂದ ಅಶೋಕನ ಕಾಲದವರೆಗೆ ಎಂದರೆ ಕ್ರಿ. ಪೂ. 3000ದಿಂದ ಕ್ರಿ. ಪೂ 300ರ ಅವಧಿಯೊಳಗಿರುವ ಕಾಲಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟಂತೆ ಸಿಕ್ಕಿರುವ ಶಾಸನಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಿರುವ ಪ್ರಸಂಗಗಳು ಇಲ್ಲ. ಕ್ರಿ. ಪೂ. 300ರಲ್ಲಿ ಬುದ್ಧಮತದ ಪ್ರಚಾರಕ್ಕಾಗಿ ಅಶೋಕ ಅನೇಕ ಕಡೆ ಶಾಸನಗಳನ್ನು ಕೆತ್ತಿಸಿದ. ಈ ಶಾಸನಗಳು ಆಗ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿದ್ದ ಖರೋಷ್ಠೀ ಮತ್ತು ಬ್ರಾಹ್ಮೀ ಲಿಪಿಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಲಿಪಿಗೂ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಸಂಖ್ಯಾಸೂಚಕಗಳಿವೆ. ಈ ಎರಡು ಪದ್ಧತಿಗಳೇ ಈಗ ನಾವು ಬಳಸುವ ಅಂಕಗಳ ರೂಪಕ್ಕೂ ದಾಶಮಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಮದ ಹುಟ್ಟುವಿಕೆಗೂ ಆಧಾರಭೂತವಾದುವು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಖರೋಷ್ಠೀ ಅಂಕಗಳು



ಚಿತ್ರ 6

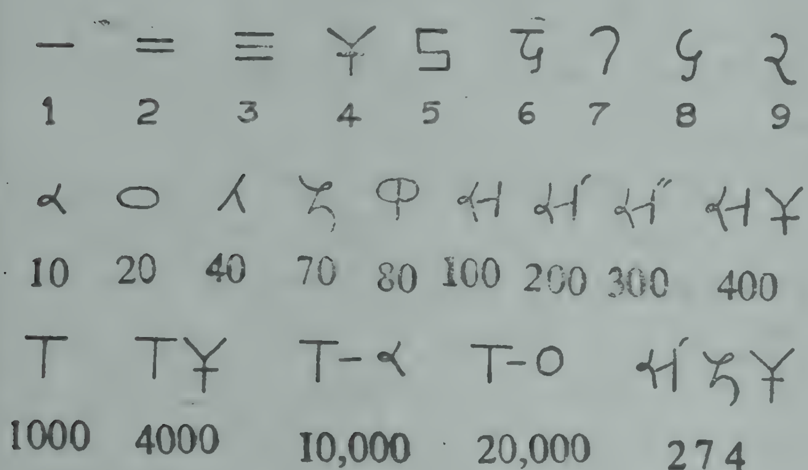
ಕೆಲವು ಶಾಸನಗಳಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಗೀಟುಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಸೂಚಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಇನ್ನು ಕೆಲವು ಶಾಸನಗಳಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕನ್ನು ಆಕನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಐದು, ಆರು, ಎಂಟು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಕಲನ ತತ್ತ್ವವನ್ನನುಸರಿಸಿ ಸೂಚಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಐದನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಮತ್ತು ಒಂದರ ಗುರುತುಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೇ ಬರೆದು ಸೂಚಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಹತ್ತಕ್ಕೆ ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹೊಸ ಗುರುತಿದೆ. ಇಪ್ಪತ್ತನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಗುರುತು ಎರಡು ಹತ್ತರ ಗುರುತುಗಳ ಸಂಯೋಗದಿಂದ ಉಂಟಾಗಿದೆ. ಅರುವತ್ತನ್ನು ಇಪ್ಪತ್ತು ಇಪ್ಪತ್ತಾಗಿ ಗುರುತಿಸಿರುವುದು ಯುಕಟಾನ್ ಪ್ರಾಂತದ ಮಾಯ ಜನಾಂಗದವರ ಕ್ರಮವನ್ನು (ಚಿತ್ರ 2) ನೆನಪಿಗೆ ತರುವುದು. ನೂರು, ಇನ್ನೂರು, ಮುನ್ನೂರು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣನತತ್ತ್ವದ ಆಧಾರದಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ನೂರನ್ನು (100 × 1) ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ ನೂರು ಮತ್ತು ಒಂದರ ಗುರುತುಗಳ ಸಂಯೋಗದಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದೆ. 200 = 100 × 2 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ನೂರರ ಗುರುತಿನ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಎರಡರ ಗುರುತನ್ನು ಬರೆದು ಇನ್ನೂರನ್ನು ಬರೆದಿದೆ (multiplicative principle).

ಹಾಗೆಯೇ ಮುನ್ನೂರನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ನೂರರ ಗುರುತಿನ ಮುಂದೆ ಮೂರರ ಗುರುತನ್ನು ಬರೆದಿದೆ.

ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದರು. "ಅಂಕಾನಾಂ ವಾಮತೋ ಗತಿಃ" ಎಂಬ ನುಡಿ ಈ ಪದ್ಧತಿಯ ಪ್ರಭಾವದಿಂದಲೇ ಬಂದದ್ದು. ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂರಎಪ್ಪತ್ತನಾಲ್ಕನ್ನು ಆರನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಬ್ರಾಹ್ಮೀ ಅಂಕಗಳು

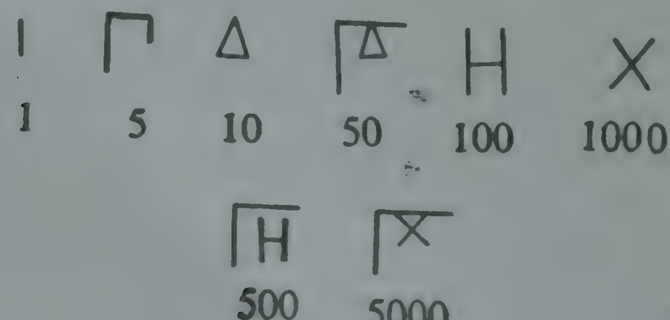


ಚಿತ್ರ 7

ಖರೋಷ್ಠೀ ಲಿಪಿಯಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಬ್ರಾಹ್ಮೀ ಲಿಪಿಯಲ್ಲಿ ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ. ಒಂದು, ಎರಡು, ಮೂರು ಇವುಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಖರೋಷ್ಠೀ ಲಿಪಿಯಲ್ಲಿ ಬೆರಳಿನ ಆಕಾರದ ಉದ್ದನೆಯ ಗೀಟುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ, ಬ್ರಾಹ್ಮೀ ಲಿಪಿಯಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆದು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಬ್ರಾಹ್ಮೀ ಲಿಪಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದರಿಂದ ಒಂಬತ್ತರ ವರೆಗೆ ಇರುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೂ ಹತ್ತು, ಇಪ್ಪತ್ತು, ಮೂವತ್ತು, ನಲವತ್ತು, ಐವತ್ತು, ಆರುವತ್ತು, ಎಪ್ಪತ್ತು, ಎಂಬತ್ತು, ತೊಂಬತ್ತು, ನೂರು, ಸಾವಿರ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ

ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಗುರುತುಗಳಿರುವುದನ್ನೂ ನಾವು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಗಮನಿಸಬೇಕು. ನಾಲ್ಕರ ಗುರುತು ನಾಲ್ಕು ಗೀಟುಗಳಿಂದಲೂ, ಐದರ ಗುರುತು ಐದು ಗೀಟುಗಳಿಂದಲೂ ಉಂಟಾಗಿವೆ. ನೂರರ ಗುರುತಿಗೆ ಒಂದರ ಗುರುತನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ 200 ರ ಗುರುತು ಆಗುವುದು. ನೂರರ ಗುರುತಿಗೆ ಎರಡರ ಗುರುತನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಮುನ್ನೂರನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಆದರೆ ನೂರರ ಗುರುತಿನ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕನ್ನು ಬರೆದರೆ 100×4 ಅಥವಾ 400 ಆಗುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಗುಣನತತ್ತ್ವವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ. ಇದೇ ತತ್ತ್ವದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ 700, 4000, 20,000 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದೆ. ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ 274 ನ್ನು ಬರೆದಿರುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಏಳನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ನೋಡಿ. ಖರೋಷ್ಠೀ ಲಿಪಿಯಲ್ಲಿ ಇದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಐದನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ.

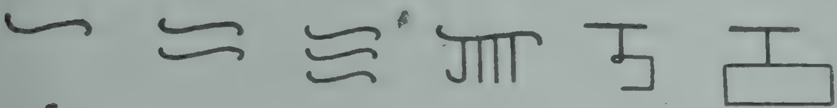
ಅನೇಕ ದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕಾಲಗಳಲ್ಲಿ ಜನಗಳು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಮೇಲೆ ವಿವರಿಸಿದೆ. ಆದರೆ ಯಾವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿಯೂ ಆದಷ್ಟು ಕಡಿಮೆ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಅಡಕವಾಗಿಲ್ಲ. ಬಹಳ ಬುದ್ಧಿವಂತರೆನಿಸಿಕೊಂಡ ಮತ್ತು ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲೂ ನಿಷ್ಣಾತರಾಗಿದ್ದ ಗ್ರೀಕ್ ಜನಾಂಗದವರೂ ಕೂಡ ಈ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಯೋಚಿಸಲಿಲ್ಲ. ರೋಮನ್ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಹೋಲುವ ಅವರ ಅಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಚಿತ್ರ 8 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 8

ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಗುಣನತತ್ತ್ವವನ್ನು ಬಳಸಿದ್ದಾರೆ. ಐವತ್ತನ್ನು ಬರೆಯಲು ಹತ್ತರ ಮತ್ತು ಐದರ ಗುರುತುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆದಿರುವುದನ್ನು 8 ನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಿ. $50=10\times5$, ಹಾಗೆಯೇ [$500=100\times5$, $5000=5\times1000$], ಐನೂರು ಮತ್ತು ಐದುಸಾವಿರ ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಬರೆದಿರುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಸಾವಿರಾರು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆಯೇ ಚೈನಾ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಪ್ರವರ್ಧಮಾನವಾದ ನಾಗರಿಕತೆಯಿತ್ತು. ಚೈನಾ ದೇಶದವರು ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದ ಕ್ರಮವನ್ನು 9ನೇ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.



1 2 3 4 5 100

ಚಿತ್ರ 9

ಬರವಣಿಗೆಗೆ ಈಗ ಪೆನ್ಸಿಲ್ ಮತ್ತು ಕಾಗದಗಳನ್ನು ನಾವು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ. ಕೇವಲ ಕೆಲವು ಶತಮಾನಗಳ ಹಿಂದೆ ಕಾಗದಗಳು ಸುಲಭ ಬೆಲೆಗೆ ಸಿಕ್ಕುತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ. ಮರದ ಪಲ್ಪ್ ಮತ್ತು ಯಂತ್ರಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಾಗದವನ್ನು ತಯಾರಿಸುವ ವಿಧಾನ ಬಳಕೆಗೆ ಬಂದದ್ದು ಹದಿನಾಲ್ಕನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ. ಸಾವಿರ ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆಯೇ ಚೈನಾ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಕಾಗದವನ್ನು ತಯಾರಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆಂದು ಹೇಳುತ್ತಾರೆ. ಹಿಂದೂ ದೇಶದಲ್ಲೂ ಇತ್ತೀಚಿನವರೆಗೆ ತಾಳೀಪತ್ರಗಳ ಮೇಲೆ ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದರೆಂಬುದು ಎಲ್ಲರಿಗೂ ತಿಳಿದ ವಿಷಯ.

ಈಜಿಪ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಪಾಪು ಎಂಬ ಗಿಡದ ಎರಡು ಮೂರು ಎಲೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ಅವುಗಳ ಮೇಲೆ ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದರಂತೆ. ಮೂರುಸಾವಿರದ ಐನೂರು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಅಹ್ಮೋಸ್ ಎಂಬುವನು ಈ ತರಹದ ಎಲೆಗಳ ಮೇಲೆ ಬರೆದ ಗಣಿತದ ಪುಸ್ತಕ ಈಗಲೂ ಉಪಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ. ಈ

ಗಿಡವನ್ನು ಪಾಪು ಎಂದೂ ಅದರ ಎಲೆಗಳನ್ನು ಪಾಪಿರಸ್ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತಿದ್ದುದರಿಂದ ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಅಹ್ಮೋಸ್‌ನ ಪಾಪಿರಸ್ (Ahmes papyrus) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ ಇನ್ನು ಕೆಲವು ದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಕುರಿ ಮತ್ತು ಕರುಗಳ ತೊಗಲುಗಳ ಮೇಲೆ ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದರು. ಈ ಪ್ರಾಣಿಗಳ ತೊಗಲುಗಳು ಬಹಳ ದುಬಾರಿಯಾಗಿದ್ದುದರಿಂದ ಈ ತೊಗಲುಗಳ ಹಾಳೆ ಗಳಿಂದ ಮಾಡಿದ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಗ್ರಂಥವನ್ನು ಬರೆದು ಅನಂತರ ಅದನ್ನು ಅಳಿಸಿ ಅದೇ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಮತ್ತೊಂದು ಗ್ರಂಥವನ್ನು ಕೂಡ ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದುದೂ ವಾಡಿಕೆಯಲ್ಲಿತ್ತು. ಬ್ರಿಟಿಷ್ ಮ್ಯೂಸಿಯಂನಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಮೂರು ಸಾರಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಒಂದು ಪುಸ್ತಕವಿದೆ. ಐದನೆಯ ಶತಮಾನ ದಲ್ಲಿ ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಚರಿತ್ರೆಯನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದರೆಂದೂ ಅನಂತರ ಅದನ್ನು ಅಳಿಸಿ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಭಾಷೆಯ ವ್ಯಾಕರಣವನ್ನು ಬರೆದರೆಂದೂ ಒಂಬತ್ತನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನೂ ಅಳಿಸಿ ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಥಿಯಾಲಜಿಯ ಒಂದು ಗ್ರಂಥವನ್ನು ಬರೆದರೆಂದೂ ಕಂಡುಬರುವುದು. ರೋಮನ್ ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಹಗುರವಾದ ಮರದ ಹಲಗೆಯ ಮೇಲೆ ಮೇಣವನ್ನು ಬಳಿದು, ಮೊನಚಾದ ಕಡ್ಡಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಇದರ ಮೇಲೆ ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದರು. ಈ ತರಹದ ಹಲಗೆಯ ಸುತ್ತಲೂ ದಪ್ಪನಾದ ಚೌಕಟ್ಟು ಹಾಕಿ ಇಂಥ ಹಲವು ಹಲಗೆ ಗಳನ್ನು ಪುಸ್ತಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪೋಣಿಸುತ್ತಿದ್ದರಂತೆ. ಇನ್ನು ಕೆಲವರು ಒಂದು ತಟ್ಟೆಯಲ್ಲಿ ಮರಳನ್ನು ತುಂಬಿ ಒಂದು ಕಡ್ಡಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅದರಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದರು. ಮತಗಳನ್ನು (votes) ಎಣಿಸಲು ಇಂಥ ಮರಳುತುಂಬಿದ ತಟ್ಟೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದರಂತೆ. ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನೆಲ್ಲ ಇಂಥ ಮರಳಿನ ತಟ್ಟೆಗಳಲ್ಲಿಯೇ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದನೆಂದು ಹೇಳುತ್ತಾರೆ ಗ್ರೀಕ್ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ abax ಎಂದರೆ ತಟ್ಟೆ. ಮರಳು ತುಂಬಿದ ತಟ್ಟೆಗೆ ಈ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಅಬೇಕಸ್ (abacus) ಎನ್ನುತ್ತಿದ್ದರು. ಆದರೆ ಈಗ ಅಬೇಕಸ್ ಎಂಬುವ ಪದಕ್ಕೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವನ್ನು ಮಾಡಲು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಮಣಿಕಟ್ಟು ಎಂಬುವ ಅರ್ಥ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿದೆ.

ಮಣಿಕಟ್ಟನ್ನು ಪ್ರಾಚೀನಕಾಲದಲ್ಲಿಯೂ ಭಾರತ, ಈಜಿಪ್ಟ್, ಗ್ರೀಕ್ ಮತ್ತು ರೋಮ್ ದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಈ ಮಣಿ

ಕಟ್ಟುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದಲೇ ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಹುಡುಗರಿಗೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಹೇಳಿಕೊಡುತ್ತಿದ್ದರು. ಬರೆಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳ ಅಭಾವ ಜೊತೆಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ಸುಸಂಸ್ಕೃತವಾದ ಒಂದು ಕ್ರಮದ ಅಭಾವ ಇವುಗಳಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡುವ ಮತ್ತು ಕಳೆಯುವಂಥ ಸಣ್ಣ ಸಣ್ಣ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳೇ ಹಿಂದಿನಕಾಲದವರಿಗೆ ಬಹಳ ಕಷ್ಟಕರವಾಗುತ್ತಿತ್ತು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ರೋಮ್ ದೇಶದ ವರ್ತಕನೊಬ್ಬ ತನ್ನ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಹಿಂದಿನಕಾಲದಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದನೆಂಬುದನ್ನು ಊಹಿಸೋಣ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಅವನು ಮಣಿಕಟ್ಟನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದನು.



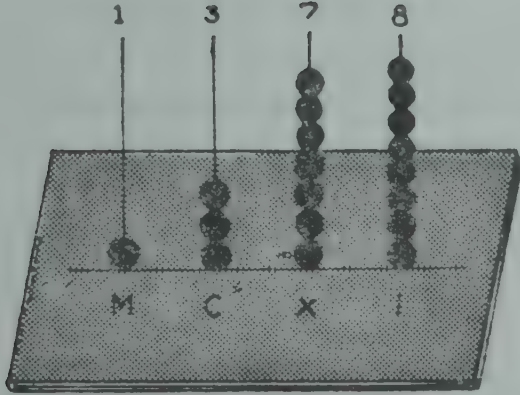
ಚಿತ್ರ 10

ಎಂಟು ಅಂಗುಲ ಉದ್ದ, ಎರಡು ಅಂಗುಲ ಅಗಲ ಮತ್ತು ಸುಮಾರು ಅರ್ಧ ಅಂಗುಲ ದಪ್ಪದ ಒಂದು ಮರದ ಘನವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ತೂತುಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಕಬ್ಬಿಣದ ಕಡ್ಡಿಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ (ಚಿತ್ರ 10) ಇಡಿ. ಈ ಕಡ್ಡಿಗಳೊಳಗೆ ಪೋಣಿಸಲು ಅನುಕೂಲವಾಗುವ ಹಾಗೆ ಮಾಡಿರುವ ಕೆಲವು ಮಣಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಇದೇ ಮಣಿಕಟ್ಟು ಅಥವಾ ಅಬೇಕಸ್ (abacus). ಮಣಿಕಟ್ಟುಗಳನ್ನು ಈಗಲೂ ಅಂಗಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಮಾರುವುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಊಹಿಸುವುದು ನಿಮಗೆ ಕಷ್ಟವಾಗಲಾರದು. ಈ ನಾಲ್ಕು

ಕಡ್ಡಿಗಳ ಕೆಳಗೆ ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ I, X, C, M ಎಂದು ಬರೆದಿದೆ. ರೋಮನ್ ಲಿಪಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಕೇತಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 1, 10, 100, 1000 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುವು. I ಎಂಬ ಗುರುತನ್ನು ಹಾಕಿರುವ ಕಡ್ಡಿಯ ಮೇಲೆ ಹಾಕುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಣಿಯ ಬೆಲೆಯೂ ಒಂದು. X ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿರುವ ಕಡ್ಡಿಯ ಮೇಲೆ ಹಾಕುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಣಿಯೂ ಹತ್ತು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. C ಎಂಬ ಕಡ್ಡಿಯ ಮೇಲೆ ಹಾಕುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಣಿಯೂ 100 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, M ಎಂಬ ಕಡ್ಡಿಯ ಮೇಲೆ ಪೋಣಿಸುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಣಿಯೂ 1000 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಈಜಿಪ್ಟ್ ದೇಶದಿಂದ ಎರಡು ಹಡಗುಗಳಲ್ಲಿ ರೋಮಿನ ಒಬ್ಬ ವರ್ತಕ ಕಲ್ಲುಗಳನ್ನು ತರಿಸಿದನೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಮೊದಲನೆಯ ಹಡಗಿನಲ್ಲಿ 1378 ಕಲ್ಲುಗಳೂ ಎರಡನೆಯ ಹಡಗಿನಲ್ಲಿ 1594 ಕಲ್ಲುಗಳೂ ಇದ್ದುವು ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ, ಎರಡು ಹಡಗುಗಳಿಂದ ವರ್ತಕ ತನಗೆ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಕಲ್ಲುಗಳು ಬಂದುವು ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಕೂಡಬೇಕಾಗುವುದು. ಈ ಸಂಕಲನವನ್ನು ಅವನು ನಮ್ಮಷ್ಟು ಸುಲಭವಾಗಿ ಮಾಡುತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ.

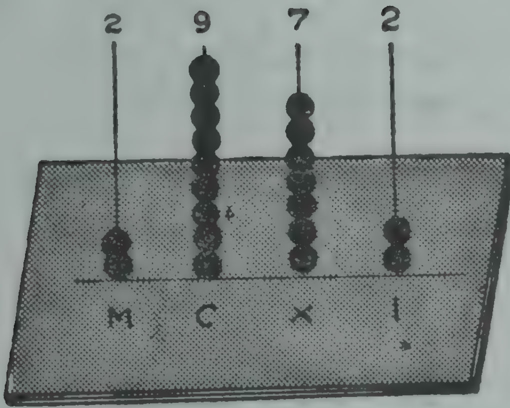
ಮೊದಲನೆಯ ಹಡಗಿನಿಂದ ಬಂದ ಕಲ್ಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಒಂದು ಮಣಿಕಟ್ಟನಲ್ಲಿ ಅವನು ಮಣಿಗಳಿಂದ ಗುರುತಿಸುತ್ತಿದ್ದನು. ಸಾವಿರದ ಮುನ್ನೂರ ಎಪ್ಪತ್ತೆಂಟು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು I ಎಂಬ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ 8 ಮಣಿಗಳನ್ನೂ X ಎಂಬ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಏಳು ಮಣಿಗಳನ್ನೂ C ಎಂಬ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಮೂರು ಮಣಿಗಳನ್ನೂ M ಎಂಬ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಒಂದು ಮಣಿಯನ್ನೂ ಹಾಕಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 11).



ಚಿತ್ರ 11

ಈಗ ಎರಡನೆಯ ಹಡಗಿನಲ್ಲಿ 1594 ಕಲ್ಲುಗಳು ಬಂದಿವೆ. 1594 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದುಸಾವಿರ, ಐದುನೂರು, ಒಂಬತ್ತು ಹತ್ತು ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮಣಿಕಟ್ಟಿನ ಸಹಾಯದಿಂದ ವರ್ತಕ ಕೊಡುವ ಕ್ರಮ ಹೀಗಿರುತ್ತಿತ್ತು. ಚಿತ್ರ 11 ರಲ್ಲಿ I ನೇ ಕಡ್ಡಿಯ ಮೇಲೆ ಎಂಟು ಮಣಿಗಳಿವೆ. ಈಗ 1594 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಏಕ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ 4 ಅನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು, I ನೇ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ನಾಲ್ಕು ಮಣಿಗಳನ್ನು ಹಾಕಬೇಕು. ಆದರೆ ಚಿತ್ರ 11 ರಲ್ಲಿ I ನೇ ಕಡ್ಡಿಯ ಮೇಲೆ ಆಗಲೇ ಎಂಟು ಮಣಿಗಳಿವೆ. ಎಂದರೆ I ನೇ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಒಟ್ಟು ಹನ್ನೆರಡು ಮಣಿಗಳು ಇದ್ದಂತಾಯಿತು. ಈಗ I ನೇ ಕಡ್ಡಿಯ ಮೇಲೆ ಹನ್ನೆರಡು ಮಣಿಗಳನ್ನು ಹಾಕುವ ಬದಲು, X ನೇ ಕಡ್ಡಿಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಮಣಿಯನ್ನೂ, I ನೇ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಎರಡು ಮಣಿಗಳನ್ನೂ ಹಾಕಿದರಾಯಿತು. ಚಿತ್ರ 11 ರಲ್ಲಿರುವ ಮಣಿಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ I ನೇ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಎರಡು ಮಣಿಗಳೂ X ನೇ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಎಂಟು ಮಣಿಗಳೂ ಬಂದಂತಾಯಿತು. 1594 ರಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕನ್ನು ಕೂಡಿದ್ದಾಯಿತು ತೊಂಬತ್ತನ್ನು ಕೂಡಲು, ಒಂಬತ್ತು ಮಣಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮಣಿಕಟ್ಟಿನ X ನೇ ಕಡ್ಡಿಯೊಳಕ್ಕೆ ಹಾಕಬೇಕು. ಆದರೆ X ನೇ ಕಡ್ಡಿಯ ಮೇಲೆ ಆಗಲೇ 8 ಮಣಿಗಳಿವೆ. ಈಗ ಹಾಕುವ ಒಂಬತ್ತು ಮಣಿಗಳನ್ನೂ

ಸೇರಿಸಿದರೆ X ನೇ ಕಡ್ಡಿಯುಮೇಲೆ ಒಟ್ಟು ಹದಿನೇಳು ಮಣಿಗಳಾಗುತ್ತವೆ. X ನೇ ಕಡ್ಡಿಯುಮೇಲೆ ಇರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಣಿಯ ಬೆಲೆಯೂ ಹತ್ತು. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಹದಿನೇಳು ಮಣಿಗಳು ನೂರ ಎಪ್ಪತ್ತು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಈಗ X ನೇ ಕಡ್ಡಿಯ ಮೇಲೆ ಹದಿನೇಳು ಮಣಿಗಳನ್ನು ಹಾಕುವ ಬದಲು, ನೂರನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು C ಕಡ್ಡಿಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಮಣಿಯನ್ನೂ, ಎಪ್ಪತ್ತನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು X ನೇ ಕಡ್ಡಿಯ ಮೇಲೆ ಏಳು ಮಣಿಯನ್ನೂ ಹಾಕಬೇಕು. ಆದರೆ ಮಣಿಕಟ್ಟಿನ ಮೇಲೆ C ಎಂಬ ಕಡ್ಡಿಯುಮೇಲೆ ಆಗಲೇ 3 ಮಣಿಗಳಿದ್ದುವು. ಈಗ ಒಂದು ಮಣಿಯನ್ನು ಹಾಕಿದಾಗ ಒಟ್ಟು C ಎಂಬ ಕಡ್ಡಿಯುಮೇಲೆ ನಾಲ್ಕು ಮಣಿಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಅನಂತರ 1594 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಐನೂರನ್ನು ಸೇರಿಸಲು ವರ್ತಕ, ಐದು ಮಣಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು C ಎಂಬ ಕಡ್ಡಿಯುಮೇಲೆ ಹಾಕುತ್ತಾನೆ. C ಕಡ್ಡಿಯ ಮೇಲೆ ಹಾಕುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಣಿಯೂ ನೂರು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಮಣಿಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ C ಕಡ್ಡಿಯುಮೇಲೆ ಆಗಲೇ ನಾಲ್ಕುಮಣಿಗಳಿದ್ದುವು. ಮತ್ತೆ ಐದು ಮಣಿಗಳನ್ನು ಹಾಕಿದ್ದರಿಂದ, C ಕಡ್ಡಿಯುಮೇಲೆ ಈಗ ಒಂಬತ್ತು ಮಣಿಗಳು ಇರುವುವು. ಈಗ 1594 ರಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸಾವಿರವನ್ನು ಕೂಡಬೇಕು. M ಕಡ್ಡಿಯುಮೇಲೆ ಹಾಕುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಣಿಯ ಬೆಲೆಯೂ ಒಂದು ಸಾವಿರ. ಆದ್ದರಿಂದ ವರ್ತಕ ಒಂದು ಸಾವಿರವನ್ನು ಕೂಡಲು, ಒಂದೇ ಒಂದು ಮಣಿಯನ್ನು ತೆಗೆದು M ಕಡ್ಡಿಯುಮೇಲೆ ಹಾಕುತ್ತಾನೆ. ಆದರೆ M ಕಡ್ಡಿಯುಮೇಲೆ ಆಗಲೇ ಮಣಿಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮಣಿ ಇತ್ತು. ಎಂದರೆ ಈಗ M ಕಡ್ಡಿಯುಮೇಲೆ ಎರಡು ಮಣಿಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಕೂಡಿದಮೇಲೆ ಮಣಿಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ M ಕಡ್ಡಿಯ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಮಣಿಗಳೂ C ಕಡ್ಡಿಯುಮೇಲೆ ಒಂಬತ್ತು ಮಣಿಗಳೂ X ಕಡ್ಡಿಯ ಮೇಲೆ ಏಳು ಮಣಿಗಳೂ I ಎಂಬ ಕಡ್ಡಿಯುಮೇಲೆ ಎರಡು ಮಣಿಗಳೂ ಇರುತ್ತವೆ. ಈಗ ಮಣಿಕಟ್ಟು ಕಾಣುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಚಿತ್ರ 12 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 12

M ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಇರುವ ಎರಡು ಮಣಿಗಳು ಎರಡು ಸಾವಿರ ವನ್ನೂ C ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಇರುವ ಒಂಬತ್ತು ಮಣಿಗಳು ಒಂಭೈನೂರನ್ನೂ X ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಇರುವ ಏಳು ಮಣಿಗಳು ಎಪ್ಪತ್ತನ್ನೂ I ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಇರುವ ಎರಡು ಮಣಿಗಳು ಎರಡನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುವುದರಿಂದ ವರ್ತಕನು ತನಗೆ ಎರಡು ಸಾವಿರದ ಒಂಭೈನೂರ ಎಪ್ಪತ್ತೆರಡು ಕಲ್ಲುಗಳು ಎರಡು ಹಡಗಿನಿಂದ ಬಂದು ಸೇರಿವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತಾನೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ರೋಮನ್ ವರ್ತಕನು ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದ ರೀತಿ ಹೀಗಿತ್ತು.

MM CCC CCC CCC X XXX XXX II

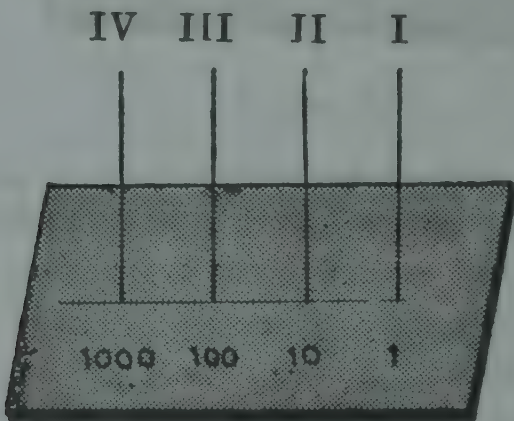
ಅಥವಾ

MM CCC CCC CCC LXX II

ಸಂಕಲನ ಒಂದಕ್ಕೇ ಇಷ್ಟು ಪಾಡಾದರೆ ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ, ಭಾಗಹಾರ ಮಾಡಲು ಈ ಜನ ಪಡುತ್ತಿದ್ದ ಕಷ್ಟ ದೇವರಿಗೇ ಗೊತ್ತು. ನಾವು ಈ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಅತಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ಮಾಡುವುದರ ಕಾರಣವಾದರೂ ಏನು ? ಕೇವಲ ಹತ್ತೇ ಗುರುತುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಬರೆಯುವುದು ಒಂದು ಕಾರಣವಾದರೆ,

ಮಣಿಕಟ್ಟಿನಿಂದ ಆಗುವ ಕೆಲಸವನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೇ ಚಿತ್ರಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂಥ ಸೊಗಸಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿರುವುದು ಮತ್ತೊಂದು ಕಾರಣ.

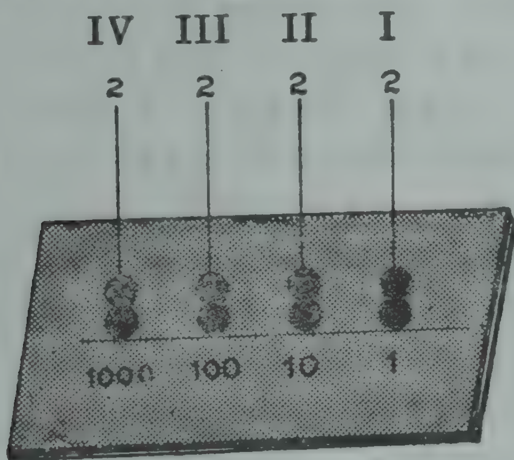
ಈಗ ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಮದ ಆವಿರ್ಭಾವಕ್ಕೆ ಮಣಿಕಟ್ಟಿನ ಉಪಯೋಗವೇ ಸ್ಫೂರ್ತಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿತೆಂದು ಧಾರಾಳವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು. ಮಣಿಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಕಡ್ಡಿಗಳಿವೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ (ಚಿತ್ರ 13).



ಚಿತ್ರ 13

ಈ ಕಡ್ಡಿಗಳಮೇಲೆ ಹಾಕುವ ಮಣಿಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ ತರಹ ಇದ್ದರೂ Iನೇ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಹಾಕುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಣಿಯೂ ಒಂದು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. IIನೇ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಹಾಕುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಣಿಯೂ ಹತ್ತು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. IIIನೇ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಹಾಕುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಣಿಯೂ ನೂರು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, IVನೇ ಕಡ್ಡಿಯ ಮೇಲೆ ಹಾಕುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಣಿಯೂ ಸಾವಿರ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಮಣಿಯನ್ನು Iನೇ ಕಡ್ಡಿಯ ಮೇಲೆ ಹಾಕಿದಾಗ ಅದರ ಬೆಲೆ ಒಂದು. ಅದೇ ಮಣಿಯನ್ನು IIನೇ

ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಹಾಕಿದಾಗ ಅದರ ಬೆಲೆ ಹತ್ತು. ಅದನ್ನೇ III ಅಥವಾ IVನೇ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಹಾಕಿದರೆ ಅದರ ಬೆಲೆ ನೂರು ಅಥವಾ ಸಾವಿರ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದೇ ಸಂಕೇತವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ ಅದು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಏಕೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಯಾಗಿರಬಾರದು ? ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಮಣಿಕಟ್ಟಿನ ನಾಲ್ಕು ಕಡ್ಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ಎರಡೆರಡು ಮಣಿಗಳು ಇವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ ಮಣಿಕಟ್ಟು ಈ ರೀತಿ ಕಾಣುತ್ತದೆ.



ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಡ್ಡಿಯ ಮೇಲೆಯೂ ಇರುವ ಮಣಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	2	2	2

ಚಿತ್ರ 14

IVನೇ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಹಾಕಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಣಿ ಸಾವಿರವನ್ನು ಸೂಚಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲಿರುವ ಎರಡು ಮಣಿಗಳು ಎರಡು ಸಾವಿರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. III ಎಂಬ ಕಡ್ಡಿಯ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಣಿಯೂ ನೂರನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಇರುವ ಎರಡು ಮಣಿಗಳು ಇನ್ನೂರನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುವು. II ಎಂಬ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಣಿಯೂ

ಹತ್ತನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದರಿಂದ ಈ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲಿರುವ ಎರಡು ಮಣಿಗಳು ಇಪ್ಪತ್ತನ್ನೂ Iನೇ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಹಾಕಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಣಿಯೂ ಒಂದನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದರಿಂದ ಈ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲಿರುವ ಎರಡು ಮಣಿಗಳು ಎರಡನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಚಿತ್ರ 14ರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಡ್ಡಿಯ ಮೇಲೂ ಇರುವ ಮಣಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆಯಾ ಕಡ್ಡಿಯ ಕೆಳಗೆ ಬರೆದಾಗ ನೋಡಲು

2 2 2 2

ಹೀಗೆ ಕಾಣುತ್ತದೆ. ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ 2 ಎಂಬ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಾಲ್ಕುಸಾರಿ ಬರೆದಿದೆ. ಮೊದಲನೆಯ 2, 2×1,000 ಅಥವಾ ಎರಡು ಸಾವಿರವನ್ನೂ, ಎರಡನೇ ಗುರುತಾದ 2, 2×100 ಅಥವಾ ಇನ್ನೂರನ್ನೂ, ಮೂರನೇ ಗುರುತಾದ 2, 2×10 ಅಥವಾ ಇಪ್ಪತ್ತನ್ನೂ, ಕೊನೇ ಗುರುತಾದ 2, 2×1 ಅಥವಾ ಎರಡನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಸಾವಿರದ ಇನ್ನೂರ ಇಪ್ಪತ್ತೆರಡು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಒಂದೇ ಗುರುತನ್ನು ನಾಲ್ಕುಸಾರಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ 2 2 2 2 ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಬಹುದು ಎಂಬ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಮಣಿಕಟ್ಟಿನ ಉಪಯೋಗದಿಂದಲೇ ಉದ್ಭವವಾಯಿತೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಒಂದೇ ಗುರುತು ಸ್ಥಾನಭೇದದಿಂದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಬಹುದು ಎಂಬ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಈ ರೀತಿ ಮನುಷ್ಯನ ಬುದ್ಧಿಗೆ ಹೊಳೆಯಿತು. ಇಂಥ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಕೆಲವು ಭಾಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಪದಗಳ ಉಪಯೋಗಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಹಿಂದೂ ದೇಶದ ಯಾವ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಸ್ಥಾನಭೇದದಿಂದ ಒಂದೇ ಪದಕ್ಕೆ ಬೇರೆ ಅರ್ಥಕೊಡುವ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ರೂಢಿಯಲ್ಲಿಲ್ಲ. ನಾವು ಪದಗಳಿಗೆ ಪ್ರತ್ಯಯಗಳನ್ನು ಹಚ್ಚುವುದರಿಂದ ಒಂದು ವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಪದವನ್ನು ಎಲ್ಲಿ ಬರೆದರೂ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ "ನಾಯಿ ಮನುಷ್ಯನನ್ನು ಕಚ್ಚಿತು" ಎಂಬ ವಾಕ್ಯವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಈ ವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಎಲ್ಲಿ ಬರೆದರೂ ವಾಕ್ಯದ ಅರ್ಥ ಬದಲಾಯಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

(1) ನಾಯಿ ಮನುಷ್ಯನನ್ನು ಕಚ್ಚಿತು.

(2) ಮನುಷ್ಯನನ್ನು ಕಚ್ಚಿತು ನಾಯಿ.

(3) ಕಚ್ಚಿತು ನಾಯಿ ಮನುಷ್ಯನನ್ನು, ಇತ್ಯಾದಿ.

(ಹೀಗೆ ಆರು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಯಾವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿಯೂ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಯಾಗುವುದಿಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ) ಸಂಸ್ಕೃತ ದಲ್ಲಿಯೂ ಹೀಗೆಯೇ. ಆದರೆ ಇಂಗ್ಲಿಷಿನಲ್ಲಿ ಇದೇ ಅರ್ಥಬರುವ

Dog Bites Man

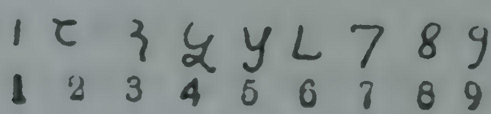
ಎಂಬುವ ವಾಕ್ಯದಲ್ಲಿ Dog ಮತ್ತು Man ಈ ಪದಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದರೆ,

Man Bites Dog

ಎಂದಾಗುವುದು! ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಯಿತು! ನಾಯಿ ಮನುಷ್ಯನನ್ನು ಕಚ್ಚಿತು ಎಂಬ ಅರ್ಥದ ಬದಲು ಮನುಷ್ಯ ನಾಯಿ ಯನ್ನು ಕಚ್ಚಿದ ಎಂಬ ಅರ್ಥ ಬರುತ್ತದೆ. ಇಂಗ್ಲಿಷಿನಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಪದವನ್ನು ಒಂದು ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ ಕರ್ತೃ ಪದವಾಗಿದ್ದು ಮತ್ತೊಂದು ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಅದೇ ಪದವನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ ಅದು ಕರ್ಮಪದ ವಾಗುತ್ತದೆ. ಇಂಥ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಇಂಗ್ಲಿಷಿನಲ್ಲಿ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿದ್ದರೂ ಇಂಗ್ಲೆಂಡಿನ ಜನರಿಗಾಗಲೀ ಯೂರೋಪಿನ ಜನರಿಗಾಗಲೀ ಒಂದೇ ಅಂಕ ವನ್ನು ಏಕ, ದಶ, ಶತ ಮುಂತಾದ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದಾಗ ಅದೇ ಗುರುತು ಒಂದು, ಹತ್ತು, ನೂರು ಇವುಗಳ ಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸ ಬಹುದೆಂಬ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಹೊಳೆಯದೆ ಇದ್ದುದು ಪರಮಾಶ್ಚರ್ಯವಾದ ಸಂಗತಿಯೇ ಸರಿ. ಇಂಥ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಹಿಂದೂ ದೇಶದ ಯಾವ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಈ ಜನರಿಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಈ ವಿಷಯ ಹೊಳೆದದ್ದು ಇನ್ನೂ ಸ್ವಾರಸ್ಯವಾದ ಸಂಗತಿ ಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಚರಿತ್ರೆಯನ್ನು ಬರೆದಿರುವ ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಲೇಖಕರನೇಕರು ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಪಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ.

ಅಶೋಕನ ಶಾಸನಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಖರೋಷ್ಠೀ ಮತ್ತು ಬ್ರಾಹ್ಮೀ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಆರನೆಯ ಮತ್ತು ಏಳನೆಯ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿದೆ. ಇವೆರಡರಲ್ಲಿ ಬ್ರಾಹ್ಮೀ ಅಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಒಂದರಿಂದ ಒಂಬತ್ತರ ವರೆಗೆ ಇರುವ ಒಂಬತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಗುರುತಿದೆ. ಬ್ರಾಹ್ಮೀ ಲಿಪಿಯಿಂದ ಈಗಿನ ಅಂಕಗಳು ಹುಟ್ಟಿವೆ ಎಂಬ ವಾದಕ್ಕೆ ಇದು ಪೋಷಕ. ಬ್ರಾಹ್ಮೀ ಲಿಪಿಯ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಲಿಪಿಕಾರರು (copyists) ಬರೆಯುವಾಗ ಅವು ರೂಪಾಂತರ ಹೊಂದಿ ಅನೇಕ ಭಾಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರಿಂದ ಒಂಬತ್ತರವರೆಗೆ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಕೃತದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸುವ ಗುರುತುಗಳು ಉಂಟಾದುವೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

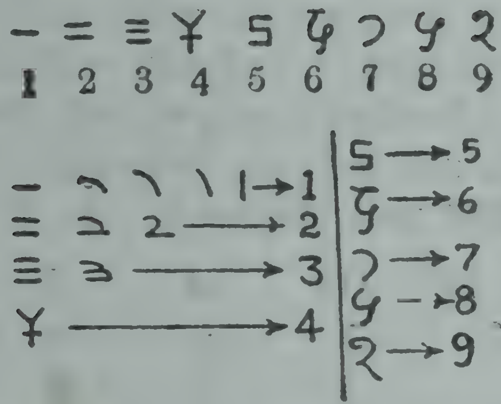
ಕ್ರಿ. ಶ. 632ರಲ್ಲಿ ಅರಬ್ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಖಲೀಫರ ಆಳ್ವಿಕೆ ನಡೆಯುತ್ತಿತ್ತು. ಇವರ ಚಕ್ರಾಧಿಪತ್ಯ ಆಫ್ಘಾನಿಸ್ತಾನದಿಂದ ಅಟ್ಲಾಂಟಿಕ್ ಸಾಗರದವರೆಗೆ ವ್ಯಾಪಿಸಿತ್ತು. ಇವರು ಸ್ಪೈನ್ ದೇಶವನ್ನು ಕೂಡ ತಮ್ಮ ವಶಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರು. ಇವರ ಮೂಲಕ ಹಿಂದೂದೇಶದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಯೂರೋಪಿನ ಜನಕ್ಕೂ ತಿಳಿಯುವಂತಾಯಿತು. ಕ್ರಿ. ಶ. 976ರಲ್ಲಿ ಸ್ಪೈನ್ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಒಂದರಿಂದ ಒಂಬತ್ತರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರ 15ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತೆ ಬರೆದಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 15

ಬ್ರಾಹ್ಮೀ ಲಿಪಿಯ ಸಂಕೇತಗಳಿಂದ ಈಗ ನಾವು ಬರೆಯುವ ಸಂಕೇತಗಳು ಹೇಗೆ ರೂಪಿತವಾಗಿರಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು 16ನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಬ್ರಾಹ್ಮೀ ಲಿಪಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದರಿಂದ ಒಂಬತ್ತರವರೆಗೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆದಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 16

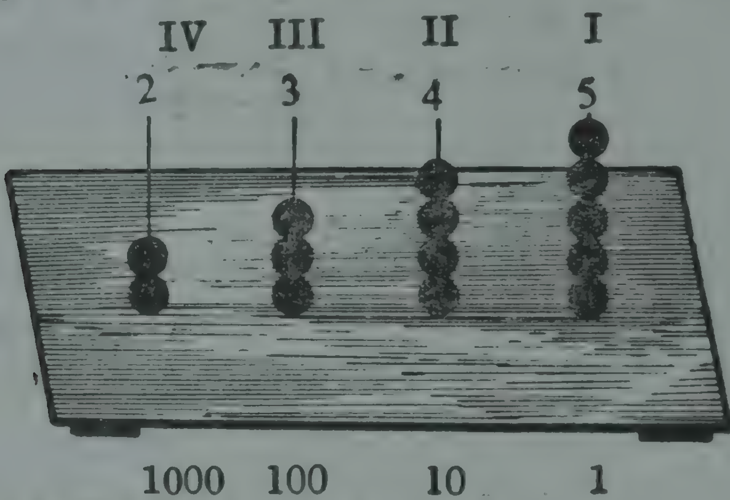
ಹೋಲಿಕೆಗಾಗಿ ಕೆಲವು ಭಾಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರಿಂದ ಒಂಬತ್ತರವರೆಗೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರ 17ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಇವೆಲ್ಲವೂ ಬ್ರಾಹ್ಮೀ ಲಿಪಿಯ ರೂಪಾಂತರಗಳೇ ಎಂದು ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಅಭಿಪ್ರಾಯ.

ದೇವನಾಗರೀ :	१	२	३	४	५	६	७	८	९
ಕನ್ನಡ / ತೆಲುಗು :	೧	೨	೩	೪	೫	೬	೭	೮	೯
ಐರೋಪ್ಯ :	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ಚಿತ್ರ 17

ಈ ಒಂಬತ್ತು ಗುರುತುಗಳೊಂದಿಗೆ ಒಂದೇ ಅಂಕವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ, ಅದೇ ಅಂಕ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಬಹುದೆಂಬ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಬಂದಮೇಲೆ ಈಗಿನ ದಾಶಮಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಮದ ಆವಿಷ್ಕರಣಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ಸಲಕರಣೆಯೆಲ್ಲವೂ ಸಿದ್ಧವಾಗಿತ್ತೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಈ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಮಣಿಕಟ್ಟಿನ ಉಪಯೋಗದಿಂದಲೇ ಬಂದಿತು ಎಂದು ಹಿಂದೆಯೇ ಹೇಳಿದೆ. ಎರಡು ಸಾವಿರದ

ಮುನ್ನೂರ ನಲವತ್ತೈದು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಾವಿರಗಳು ಮೂರು ನೂರುಗಳು ನಾಲ್ಕು ಹತ್ತುಗಳು ಐದು ಒಂದುಗಳು (units) ಇರುವುದರಿಂದ ಮಣಿಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹದಿನೆಂಟನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಮಣಿಕಟ್ಟಿನ ನಾಲ್ಕು ಕಡ್ಡಿಗಳಮೇಲೆಯೂ ಎರಡು, ಮೂರು, ನಾಲ್ಕು, ಐದು ಮಣಿಗಳನ್ನು ಹಾಕಿ ಸೂಚಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 2345 ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ 5 ಎಂಬ ಅಂಕ



ಕಡ್ಡಿಗಳಮೇಲೆ ಇರುವ ಮಣಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	2	3	4	5

ಚಿತ್ರ 18

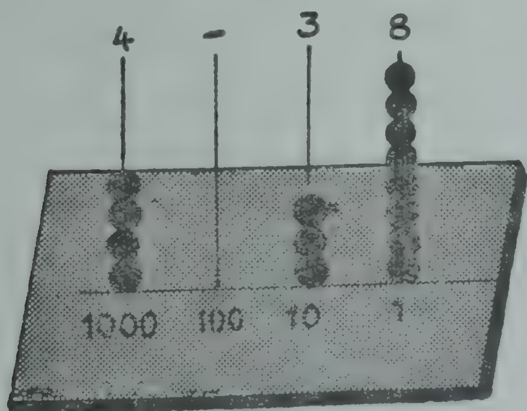
ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ ಐದನ್ನೇ ಸೂಚಿಸುವುದು. 4 ಎಂಬ ಗುರುತು ದಶಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ ನಾಲ್ಕು ಹತ್ತುಗಳು ಅಥವಾ ನಲವತ್ತನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಶತಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ 3 ಎಂಬ ಗುರುತು ಮೂರು ನೂರುಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಮುನ್ನೂರನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಸಹಸ್ರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ 2 ಎಂಬ ಗುರುತು ಎರಡು ಸಾವಿರಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

$$2345 = 2 \times 1000 + 3 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \times 1$$
$$= 2000 + 300 + 40 + 5$$

ಇಷ್ಟು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡ ಕೇವಲ ನಾಲ್ಕೇ ಗುರುತುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸೂಚಿಸಲು ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು. ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ ಹೋದಂತೆಲ್ಲ ಅಂಕಗಳ ಬೆಲೆ ಹತ್ತು ಪಟ್ಟು ಹೆಚ್ಚುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದನ್ನು decimal place value system ಅಥವಾ ದಾಶಮಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಮವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಈಗ ನಾಲ್ಕು ಸಾವಿರದ ಮೂವತ್ತೆಂಟು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಣಿಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಸಾವಿರಗಳು ನಾಲ್ಕು ಇವೆಯಾದ್ದರಿಂದ ಸಾವಿರದ ಕಡ್ಡಿಯ ಮೇಲೆ ನಾಲ್ಕು ಮಣಿಗಳನ್ನೂ ಮೂರು ಹತ್ತುಗಳು ಇರುವುದರಿಂದ ಹತ್ತರ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಮೂರು ಮಣಿಗಳನ್ನೂ ಎಂಟು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಒಂದರ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಎಂಟು ಮಣಿಗಳನ್ನೂ ಹಾಕುತ್ತೇವೆ.

IV III II III



4 – 3 8

ಚಿತ್ರ 19

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ನೂರು ಇಲ್ಲದ್ದರಿಂದ ನೂರರ ಕಡ್ಡಿ ಖಾಲಿಯಾಗಿಯೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಡ್ಡಿಯಲ್ಲಿರುವ ಮಣಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಬರೆದರೆ

4 – 3 8

ಎಂದಾಗುವುದು. ನೂರರ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಯಾವ ಮಣಿಯೂ ಇಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ ಅದನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಒಂದು ಅಡ್ಡ ಗೀಟನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. ಈ ಅಡ್ಡ ಗೀಟಿನ ಬದಲು 0 ಎಂಬ ಗುರುತನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ಗುರುತನ್ನು ಬರೆದಾಗ ಆ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಯಾವ ಮಣಿಯೂ ಇಲ್ಲವೆಂದು ಅರ್ಥಮಾಡಿದರೆ, ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 4 0 3 8 ಎಂದು ಬರೆದು ಸೂಚಿಸಬಹುದು.

$$4038=4\times1000+0\times100+3\times10+8$$
$$=4000+30+8$$

ಹೀಗೆ ಏಕ, ದಶ, ಶತ, ಸಹಸ್ರ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಮಣಿಕಟ್ಟಿನ ಮೇಲೆ ಯಾವ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲಾದರೂ ಮಣಿಗಳು ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು 0 ಎಂಬ ಗುರುತಿನಿಂದ ಸೂಚಿಸಬಹುದೆಂದು ಹಿಂದೂ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಯೋಚಿಸಿದರು.

ಹೀಗೆ ಶೂನ್ಯ ಅಥವಾ ಸೊನ್ನೆಯ ಆವಿಷ್ಕರಣಕ್ಕೂ ಮಣಿಕಟ್ಟೇ ಕಾರಣ. ಮಣಿಕಟ್ಟಿನ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಮಣಿಗಳು ಇರದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು 0 ಎಂಬ ಗುರುತನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಹಿಂದೂ ದೇಶದಲ್ಲೇ ರೂಪಿತವಾಯಿತೆಂದು ತಿಳಿದುಬಂದಿದ್ದರೂ, ಇದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ವ್ಯಕ್ತಿ ಯಾರು ಎಂಬುದು ತಿಳಿದಿಲ್ಲ. ಹಾಲ್‌ಸ್ಟೆಡ್ ಎಂಬ ಅಮೆರಿಕದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಕ್ರಿ. ಪೂ. 200ರ ಹೊತ್ತಿಗೇ ಹಿಂದೂ ದೇಶದಲ್ಲಿ 0 ಎಂಬ ಗುರುತಿನ ಆವಿಷ್ಕರಣ ಆಗಿತ್ತೆಂದು ಹೇಳುತ್ತಾರೆ. ಮಣಿಕಟ್ಟಿನ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಮಣಿಗಳು ಯಾವುವೂ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು 0 ಎಂಬ ಗುರುತಿನಿಂದ ಸೂಚಿಸಬಹುದೆಂಬ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಹೊಳೆದದ್ದು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು

ಆಂದೋಳನವನ್ನೇ ಉಂಟುಮಾಡಿತು. ಅಷ್ಟೇ ಪ್ರಭಾವಯುತವಾದ ಮತ್ತೊಂದು ವಿಚಾರವೆಂದರೆ 2 ಎಂಬ ಒಂದೇ ಗುರುತು ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ ಎರಡನ್ನೂ ದಶಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ ಇಪ್ಪತ್ತನ್ನೂ ಶತಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ ಇನ್ನೂರನ್ನೂ ಸಹಸ್ರಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ ಎರಡು ಸಾವಿರವನ್ನೂ ಸೂಚಿಸಬಹುದೆಂಬ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಹೊಳೆದದ್ದು. ಈ ಎರಡು ಮಹತ್ವಪೂರಿತವಾದ ವಿಚಾರಗಳು ಭಾರತದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಿಗೆ ಹೊಳೆದ ತತ್‌ಕ್ಷಣವೇ ಯಾವಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಯೇ ಆಗಲಿ, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ಈ ಹತ್ತು ಗುರುತುಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಬೇಕಾದರೂ ಮತ್ತೆ ಬೇರೆ ಗುರುತುಗಳ ಆವಶ್ಯಕತೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ತಿಳಿಯಲು ಹೆಚ್ಚುಕಾಲ ಬೇಕಾಗಲಿಲ್ಲ ಏಕೆಂದರೆ ಮಣಿಕಟ್ಟಿನ ಮೇಲೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಾಗ ಯಾವ ಕಡ್ಡಿಯ ಮೇಲಾದರೂ ಒಂದರಿಂದ ಒಂಬತ್ತು ಮಣಿಗಳು ಮಾತ್ರ ಇರಬಹುದು ಅಥವಾ ಕಡ್ಡಿ ಖಾಲಿ ಇರಬಹುದು. ಒಂದು ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಹತ್ತು ಮಣಿಗಳನ್ನು ಹಾಕುವ ಪ್ರಸಂಗ ಬಂದಾಗ ಆ ಹತ್ತು ಮಣಿಗಳ ಬದಲು ಅದರ ಎಡಗಡೆ ಇರುವ ಕಡ್ಡಿಯಮೇಲೆ ಒಂದು ಮಣಿಯನ್ನು ಹಾಕುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ ರೂಪಿತವಾದ **ದಾಶಮಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಣಿಕಟ್ಟು ಮಾಡುವ ಕೆಲಸವನ್ನೇ ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ಒಂದು ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ** ಎನ್ನಬಹುದು. 2308 ಎಂದು ಬರೆದಾಗ ಎರಡು ಸಾವಿರಗಳು ಮೂರುನೂರು, ಹತ್ತುಗಳು ಇಲ್ಲ ಮತ್ತು ಎಂಟು ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಸಂಖ್ಯೆ ನಮ್ಮ ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿರುವುದು. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಣಿಕಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿದರೆ ಮಣಿಕಟ್ಟಿನ ಕಡ್ಡಿಗಳಮೇಲೆ ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ 2, 3, 0 ಮತ್ತು 8 ಮಣಿಗಳು ಇರುತ್ತಿದ್ದುವು.

ಪ್ರಸಿದ್ಧರಾದ ಆಧುನಿಕ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬರಾದ ವಾಂಡರ್ ವಾರ್ಡನ್ ಎಂಬುವರು ತಮ್ಮ ಸೈನ್ಸ್ ಅವೇಕನಿಂಗ್ (Science Awakening) ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ದಾಶಮಿಕ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದವರು ಹಿಂದೂಗಳೇ ಎಂದು ಒಪ್ಪಿದರೂ ಜ್ಯೋತಿಃಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಹಿಂದೂಗಳು ಗ್ರೀಕರಿಂದ ಕಲಿತರೆಂದೂ ಶೂನ್ಯವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಉಪ

ಯೋಗಿಸುವ 0 ಎಂಬ ಗುರುತು ಗ್ರೀಕ್ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯ ಎಂಬ ಅರ್ಥವುಳ್ಳ ονδέν ಅನ್ನುವ ಪದದ ಮೊದಲನೇ ಅಕ್ಷರವಾಗಿದ್ದು ಹಿಂದೂಗಳು ಗ್ರೀಕರಿಂದ ಈ ಗುರುತನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಂಡರೆಂದೂ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಪಡುತ್ತಾರೆ. ವಿಭೂತಿ ಭೂಷಣದತ್ತ ಮತ್ತು ಅವಧೇಶ ನಾರಾಯಣಸಿಂಗ್ ಎಂಬ ಇಬ್ಬರು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ತಮ್ಮ ಹಿಂದೂ ದೇಶದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಚರಿತ್ರೆ (History of Hindu Mathematics) ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಚಾರಿತ್ರಿಕವಾದ ದೃಷ್ಟಿಕೋನದಿಂದ ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಆಧಾರಗಳೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅವರು ಉಲ್ಲೇಖಿಸಿರುವ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳನ್ನೇ ಮುಂದೆ ಬರೆದಿದೆ.

ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಪ್ರಾಶಸ್ತ್ಯವಿದ್ದಿತು ಎಂಬುದು ಈ ಶ್ಲೋಕದಿಂದ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುವುದು.

ಯಥಾ ಶಿಖಾ ಮಯೂರಾಣಾಂ
ನಾಗಾನಾಂ ಮಣಯೋ ಯಥಾ
ತದ್ವದ್ವೇದಾಂಗ ಶಾಸ್ತ್ರಾಣಾಂ
ಗಣಿತಂ ಮೂರ್ಧನಿ ಸ್ಥಿತಂ

ಇದರ ಅರ್ಥ : ನವಿಲಿಗೆ ಶಿಖೆ ಹೇಗೆ ಅಲಂಕಾರಪ್ರಿಯವಾಗಿದೆಯೋ ಹಾವುಗಳಿಗೆ ಹೆಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಮಣಿಗಳು ಹೇಗೆ ಅಂದವನ್ನು ತರುವವೋ ಹಾಗೇ ವೇದಕ್ಕೆ ಅಂಗಭೂತವಾದ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲ ಗಣಿತ ಪ್ರಧಾನವಾಗಿದೆ. Mathematics is the Queen of Sciences ಎಂಬ ಈಗಿನ ನುಡಿಗೆ ಇದು ಸಮಾನವಾಗಿವೆ. ಬರವಣಿಗೆ ವೇದಗಳ ಕಾಲದಿಂದ ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಬಳಕೆಯಿತ್ತು ಎಂಬುದು "ಓಂ ಇತ್ಯೇಕಾಕ್ಷರಂ ನಮ ಇತಿದ್ವೇ ಅಕ್ಷರೇ" ಮುಂತಾದ ವೇದ ವಾಕ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಅಕ್ಷರ ಶಬ್ದ ಪ್ರಯೋಗದಿಂದ ಗೊತ್ತಾಗುವುದು. ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದರು ಎಂಬುದನ್ನು "ಸಹಸ್ರಂ ಮೋದದತೋ ಅಷ್ಟಕರ್ಣ್ಯಾಃ" ಎಂಬ ವೇದವಾಕ್ಯದಿಂದ ಊಹಿಸಬಹುದು. ಕಿವಿಯಲ್ಲಿ ಎಂಟನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರುವ ಸಾವಿರ ಹಸುಗಳನ್ನು ಕೊಡಿ ಎಂಬುದು ಇದರ

ಅರ್ಥ. ಕ್ರಿ.ಪೂ. 200ರಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಚಂಡಸೂತ್ರ ಎಂಬ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯದ 0 ಗುರುತನ್ನು ಬಳಸಿದೆ. ಸಿರಿಯದ ಸೆಬೋಕ್ಟ್ (Sebokt) ಎಂಬುವನು ಭಾರತೀಯರ ಜ್ಯೋತಿಃ ಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳ ಜ್ಞಾನ ಗ್ರೀಕರಷ್ಟೇ ಉತ್ತಮವಾಗಿತ್ತು ಎಂದು ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಪಟ್ಟಿರುವನು. ಕ್ರಿ. ಪೂ. 400 ರಿಂದ ಕ್ರಿ. ಶ. 400ರ ಒಳಗಿನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಹಿಂದೂ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಸರ್ವತೋಮುಖವಾದ ಪ್ರಗತಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತಿತ್ತು. ವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಸಾಹಿತ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ವೇದಾಂತ ವಿಚಾರಗಳಲ್ಲಿ ಮಹತ್ತರವಾದ ಪ್ರಗತಿಯುಂಟಾಯಿತು. ಈ ಕಾಲದಲ್ಲಿಯೇ ಬೌದ್ಧ ಮತ ಮತ್ತು ಜೈನ ಮತಗಳ ಪ್ರಚಾರವೂ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ನಡೆಯಿತು. ಕಾಳಿದಾಸನೇ ಮುಂತಾದ ಕವಿಗಳು ತಮ್ಮ ಅಮೋಘವಾದ ಕೃತಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದ್ದು ಈ ಕಾಲದಲ್ಲಿಯೇ. ಪತಂಜಲಿಯ ವ್ಯಾಕರಣವೂ ಕೌಟಿಲ್ಯನ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರವೂ ಇದೇ ಕಾಲದಲ್ಲಿಯೇ ಬರೆಯಲ್ಪಟ್ಟವು. ಹತ್ತರ ಘಾತಗಳನ್ನೇ ಆಧಾರವನ್ನಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ ದಾಶಮಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಮವೂ ಈ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಹಿಂದೂ ದೇಶದವರಿಂದಲೇ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲ್ಪಟ್ಟಿತು ಎಂದು ಹೇಳಲು ಸಾಕಷ್ಟು ಆಧಾರಗಳಿವೆ.

ಒಂದು ಹೊಸ ಪದ್ಧತಿಯು ಆವಿಷ್ಕರಣವಾದ ತತ್‌ಕ್ಷಣವೇ ಜನರು ಅದನ್ನು ಸ್ವಾಗತಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಹೊಸ ಪದ್ಧತಿ ಎಷ್ಟೇ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದ್ದು ಹಳೆಯ ಪದ್ಧತಿ ಎಷ್ಟೇ ಕ್ಲಿಷ್ಟವಾಗಿದ್ದರೂ ಜನರು ಹೊಸದನ್ನು ಸ್ವಾಗತಿಸದೇ ಹಳೆಯದಕ್ಕೇ ಅಂಟಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ಈ ಪ್ರವೃತ್ತಿ ಭೂಮಿಯಮೇಲೆ ಎಲ್ಲ ಕಾಲಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಎಲ್ಲ ದೇಶಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಇದ್ದ ಜನರಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬಂದಿದೆ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಗ್ರೀಕರು ಅಕ್ಷರ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಕ್ರಿ.ಪೂ ಏಳನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದರೂ ಆ ಪದ್ಧತಿ ಆ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಬಳಕೆಗೆ ಬಂದದ್ದು ಸುಮಾರು ಎಂಟುನೂರು ವರ್ಷಗಳ ಅನಂತರ, ಎಂದರೆ ಕ್ರಿ. ಶ. ಎರಡನೇ ಶತಮಾನದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ. ನಾಣ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಬಳಕೆಗೆ ತಂದರೆ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಮಾಡುವ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಿಗೆ ಬಹಳ ಅನುಕೂಲವೆಂಬುದು ಎಲ್ಲರಿಗೂ ತಿಳಿದ ವಿಷಯ. ಒಂದು ರೂಪಾಯಿಗೆ ಹದಿನಾರು ಆಣೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಆಣೆಗೆ ಹನ್ನೆರಡು ಕಾಸುಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ ಪ್ರೈಮರಿ ಶಾಲೆ

ಗಳ ಹುಡುಗರು ರೂಪಾಯಿ ಆಣೆ ಪೈಗಳ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಬಹಳ ಕಷ್ಟಪಟ್ಟು ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದರು. ಕೂಡುವ ಲೆಕ್ಕಕ್ಕೆ ಪೈಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಕೂಡಿ ಹನ್ನೆರಡರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಆಣೆಗಳನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಬೇಕಾಗಿತ್ತು. ಅನಂತರ ಆಣೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಕೂಡಿ ಹದಿನಾರರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ರೂಪಾಯಿಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಬೇಕಾಗಿತ್ತು. ಒಂದು ರೂಪಾಯಿಗೆ ನೂರು ಪೈಸೆಗಳಾದಮೇಲೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳು ಸುಲಭ ವಾಯಿತು. ನೂರು ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ ಅಕ್ಕಿಗೆ 175 ರೂ. ಆದರೆ ಒಂದು ಕಿಲೋ ಗ್ರಾಂ ಅಕ್ಕಿಗೆ 1·75 ರೂ. ಅಥವಾ ಒಂದು ರೂಪಾಯಿ ಎಪ್ಪತ್ತೈದು ಪೈಸೆ ಎಂದು ನಮ್ಮ ಶಾಲೆಯ ಹುಡುಗರು ಕೂಡಲೇ ಹೇಳುತ್ತಾರೆ. ಹನ್ನೆರಡ ರಿಂದಾಗಲೀ ಹದಿನಾರರಿಂದಾಗಲೀ ಭಾಗಿಸುವ ಹವ್ಯಾಸವಿಲ್ಲ. ಆದರೂ ಹಳೆಯ ಪದ್ಧತಿಯಿಂದ ಹೊಸದಾದ ದಾಶಮಿಕ ಪದ್ಧತಿಗೆ ಪರಿವರ್ತನ ಮಾಡುವುದರ ಹೊಸದರಲ್ಲಿ ಜನರು ಇದನ್ನು ಸ್ವಾಗತಿಸಲಿಲ್ಲ. ರಾಜಾಜಿ ಯಂಥ ಮೇಧಾವಿಗಳೂ ಇದಕ್ಕೆ ವಿರೋಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರು. ಮಾನವ ಸಹಜವಾದ ಈ ಸ್ವಭಾವವೇ, ಸುಮಾರು ಕ್ರಿ. ಪೂ. 2ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲ್ಪಟ್ಟ ಈ ಕ್ರಮ ಕ್ರಿ.ಶ. ಆರನೇ ಅಥವಾ ಏಳನೇ ಶತಮಾನದ ಹೊತ್ತಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಭಾರತದ ಎಲ್ಲ ಕಡೆಯೂ ಬಳಕೆಗೆ ಬರಲು ಕಾರಣ. ಸುಮಾರು ಕ್ರಿ.ಶ. 595 ರಿಂದ ಕ್ರಿ. ಶ. 972ರ ಒಳಗಿನ ಭಾರತದ ಕೆತ್ತನೆ ಕೆಲಸಗಳಲ್ಲೂ ಶಾಸನಗಳಲ್ಲೂ ದಾಶಮಿಕ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ. ಗುರ್ಜರ ಗ್ರಾಂಟ್‌ಪ್ಲೇಟಿನಲ್ಲಿ 346ನೇ ಸಂವತ್ಸರವನ್ನು ಬರೆಯುವಾಗ 346 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಾಶಮಿಕ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿಯೇ ಬರೆದಿದೆ. ಕ್ರಿ.ಶ. 725ರಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲ್ಪಟ್ಟು ಈಗ ಬ್ರಿಟಿಷ್ ಮ್ಯೂಸಿಯಂ ನಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಶಾಸನಗಳಲ್ಲಿ 781 ಮತ್ತು 783 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ದಾಶಮಿಕ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿಯೇ ಬರೆದಿದೆ. ಕ್ರಿ.ಶ. 951 ರಲ್ಲಿ ಸಂಸ್ಕೃತದಲ್ಲಿಯೂ ಹಳಗನ್ನಡದಲ್ಲಿಯೂ ಬರೆದಿರುವ ಒಂದು ಶಾಸನದಲ್ಲಿ 873 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಯನ್ನು ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿಯೇ ಬರೆದಿದೆ. ಭಾರತೀಯರು ವಲಸೆ ಹೋಗಿದ್ದ ಏಷ್ಯದ ಆಗ್ನೇಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಸುಮಾತ್ರ ಮತ್ತು ಕಾಂಬೋಡಿಯ ಗಳಲ್ಲಿ ಸಿಕ್ಕಿದ ಶಾಸನಗಳಲ್ಲಿ 605, 606 ಮತ್ತು 608 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಗಳನ್ನು ದಾಶಮಿಕ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ.

ಈ ದಾಶಮಿಕ ಕ್ರಮ ಅರಬ್ಬರಿಂದ ಕಾಲಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಯುರೋಪನ್ನು ತಲಪಿತು. ಕ್ರಿ.ಶ. 711ರಲ್ಲಿ ಅರಬ್ ದೇಶದ ಮೂರ್ ಜನಾಂಗದವರು ಸ್ಪೈನ್ ದೇಶವನ್ನು ಗೆದ್ದರು. ಈ ಜನಾಂಗದವರಿಂದ ಸ್ಪೈನ್ ದೇಶದ ಜನರು ದಾಶಮಿಕ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವುದನ್ನು ಕಲಿತರು. ಅನಂತರ ಈ ಕ್ರಮ ಯುರೋಪಿನ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಭಾಗಗಳಿಗೂ ಹರಡಿತು. ಕ್ರಿ.ಶ. 825ರಲ್ಲಿದ್ದ ಬಾಗ್ದಾದಿನ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನಾದ ಅಲ್‌ಖೋವಾರಿಜ್ಮಿ ಪ್ರಪಂಚದ ಎಲ್ಲ ಜನರೂ ಇದೇ ಕ್ರಮವನ್ನೇ ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕೆಂದು ಸಲಹೆಮಾಡಿದ್ದಾನೆ. ಆದರೂ ಯುರೋಪಿನ ಎಲ್ಲ ಜನರೂ ಕೂಡಲೇ ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ಸ್ವಾಗತಿಸಲಿಲ್ಲ. ಫ್ಲಾರೆನ್ಸ್ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಾರದೆಂದು ಕಾನೂನು ಮಾಡಿದ್ದರಂತೆ. ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಹಣದ ಚೆಕ್ಕುಗಳಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವ 0, 6, 9 ಈ ಅಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಅಂಕವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಅಂಕವನ್ನಾಗಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸಬಹುದೆಂಬುದೇ ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣವಾಗಿತ್ತು. ಜನರೆಲ್ಲರೂ ನಿತ್ಯದ ಬಳಕೆಗೆ ರೋಮನ್ ಅಂಕಗಳನ್ನೇ ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಆದರೆ ಕಾಲಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ದಾಶಮಿಕ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವುದರಿಂದ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಹಾರ ಮುಂತಾದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾಗಿ ಮಾಡಬಹುದೆಂಬ ವಿಷಯ ಮನದಟ್ಟಾದ ಮೇಲೆ, ಸುಮಾರು ಹದಿನೇಳನೆಯ ಶತಮಾನದ ಹೊತ್ತಿಗೆ ಯುರೋಪಿನ ಜನರೆಲ್ಲರೂ ಈ ದಾಶಮಿಕ ಕ್ರಮವನ್ನೇ ಬಳಸತೊಡಗಿದರು.

ಅಂಕಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಅಕ್ಷರಗಳು

ಗ್ರೀಕರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಅವರ ಲಿಪಿಯಲ್ಲಿದ್ದ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನೇ ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದರು.

α (ಆಲ್ಫ)	1	ι (ಅಯೋಟ)	10	ρ (ರೋ)	100
β (ಬೀಟ)	2	κ (ಕಾಪ)	20	σ (ಸಿಗ್ಮ)	200
γ (ಗಾಮ)	3	λ (ಲ್ಯಾಮ್ಡ)	30	τ (ಟಾ)	300
δ (ಡೆಲ್ಟ)	4	μ (ಮ್ಯು)	40	υ (ಅಪ್ಸಿಲಾನ್)	400
ϵ (ಎಪ್ಸಿಲಾನ್)	5	ν (ನು)	50	ϕ (ಫೈ)	500
ϛ (ವಾ)	6	ξ (ಗ್ಸೈ)	60	χ (ಕೈ)	600
ζ (ಜೀಟ)	7	o (ಓಮಿಕ್ರಾನ್)	70	ψ (ಪ್ಸೈ)	700
η (ಈಟ)	8	π (ಪೈ)	80	ω (ಓಮೀಗ)	800
θ (ಥೀಟ)	9	ϙ (ಕೊಪ್ಪ)	90	ϡ (ಸಂಪಿ)	900

ಪುನಃ α ದಿಂದ θ ವರೆಗೆ 1000 ದಿಂದ 9000 ಇತ್ಯಾದಿ.

ಚಿತ್ರ 20

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗ್ರೀಕರು ಸೂಚಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಪದಗಳಿಗೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಪದಗಳಮೇಲೆ ಗೀಟನ್ನಾಗಲೀ ಅಥವಾ ಪದದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಗೀಟನ್ನಾಗಲೀ ಹಾಕುತ್ತಿದ್ದರು.

$$\overline{\beta\sigma\nu\eta}=2258$$

$$\left.\begin{array}{l}\beta - 2000\\ \sigma - 200\\ \nu - 50\\ \eta - 8\end{array}\right\} \text{ ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ } 2258$$

ಹತ್ತು ಸಾವಿರಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು M(=10⁴) ಗುರುತಿನ ಸಹಾಯದಿಂದ ಬರೆಯುತ್ತಿದ್ದರು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ

$$\overset{\lambda\delta}{M}\,\upsilon\eta=34\times10^4+50+8$$
$$=340058, \quad [\lambda=30,\ \delta=4].$$

ಆದರೆ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಅವ್ಯಕ್ತಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದುದ್ದರಿಂದ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸೂಚಕಗಳನ್ನಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಯೂರೋಪಿನಲ್ಲಿ ಕ್ರಮೇಣ ಬಿಡಲಾಯಿತು.

ತಮಿಳಿನಲ್ಲಿ ಈಗಲೂ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಯೇ ಒಂದರಿಂದ ಒಂಬತ್ತರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
௧	௨	௩	௪	௫	௬	௭	௮	௯
ಕ	ಉ	ನ	ಶ	ರು	ಶು	ಎ	ಅ	ಒ

ಗ್ರೀಕ್ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನೂ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಬದಲು ದಾಶಮಿಕ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದರೆ ಕೇವಲ ಒಂಬತ್ತೇ ಅಕ್ಷರಗಳು ಸಾಕಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ತಮಿಳು ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಈಗಲೂ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ

௧௧ — ಎಂದರೆ 11

௨௪ — ಎಂದರೆ 24

ಪುರಾತನ ಕಾಲದ ಭಾರತದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಗಳೆಲ್ಲ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸಂಸ್ಕೃತದಲ್ಲಿವೆ. ಸಂಸ್ಕೃತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಶ್ಲೋಕಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ

ರಚಿಸಬಹುದು. ಶ್ಲೋಕಗಳನ್ನು ಸಂಸ್ಕೃತದಲ್ಲಿ ಇಂಪಾಗಿ ಹಾಡಬಹುದು. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಗಳು, ಸೂತ್ರಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಶ್ಲೋಕಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ. ಈ ಶ್ಲೋಕಗಳನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ, ಇದರ ಕರ್ತೃ ಕೇವಲ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನಲ್ಲದೇ ಒಬ್ಬ ರಸಜ್ಞನಾದ ಕವಿಯೂ ಆಗಿದ್ದಾನೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಜನಜನಿತವಾದ ಒಂದು ಕಥೆ ನೆನಪಿಗೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಒಬ್ಬ ಸಂಗೀತಪ್ರೇಮಿ ರಾಜ ಸಂಗೀತದಲ್ಲಿ ತೀವ್ರ ಆಸಕ್ತನಾಗಿ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲರೂ ರಾಜನಿಗೆ ಸಂಗೀತದಲ್ಲಿಯೇ ಅರಿಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು ಎಂಬ ಅತಿರೇಕವಾದ ಆಜ್ಞೆಯನ್ನು ಹೊರಡಿಸಿದ. ಹೀಗಿದ್ದಾಗ ಕುದುರೆಲಾಯಕ್ಕೆ ಬೆಂಕಿಬಿದ್ದು ಅದನ್ನು ಅರಿಕೆ ಮಾಡಲು ಬಂದ ಕಾವಲುಗಾರ ರಾಗಾಲಾಪನೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಆ ವಿಷಯವನ್ನು ಅರಿಕೆ ಮಾಡುವ ವೇಳೆಗೆ ಆ ಲಾಯ ಭಸ್ಮಾವಶೇಷವಾಗಿ ಹೋಗಿತ್ತಂತೆ. ಇದು ನಮ್ಮ ಹರಿಕಥೆಯ ದಾಸರುಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಕಥೆ. ಹೀಗೆ ನಮ್ಮ ಹುಡುಗರಿಗೆ ಶ್ಲೋಕರೂಪದಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಬೋಧಿಸುವ ಸಾಹಸಮಾಡಲು ಹೊರಟರೆ, ಆ ಉಪಾಧ್ಯಾಯನ ಪಾಡು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ರಾಜನ ಪಾಡಾಗುತ್ತದೆ.

ಕ್ರಿ.ಶ. 1114ರಲ್ಲಿ ಹುಟ್ಟಿದ ಎರಡನೆಯ ಭಾಸ್ಕರಾಚಾರ್ಯ ಎಂದು ಪ್ರಸಿದ್ಧನಾದ ಭಾರತದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಲೀಲಾವತೀ ಎಂಬ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ತನ್ನ ಮಗಳಾದ ಲೀಲಾವತಿಯನ್ನು 135ನ್ನು 12ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಎಷ್ಟು ಎಂದು ಕೇಳುವ ಶ್ಲೋಕ ಹೀಗಿದೆ.

ಬಾಲೇ ಬಾಲಕುರಂಗಲೋಲನಯನೇ ಲೀಲಾವತಿ ಪ್ರೋಚ್ಯತಾಂ
ಪಂಚತ್ರ್ಯೇಕಮಿತಾ ದಿವಾಕರಗುಣಾ ಅಂಕಾಃ ಕತಿಸ್ಯುರ್ಯದಿ
ರೂಪಸ್ಥಾನವಿಭಾಗಖಂಡಗುಣನೇ ಕಲ್ಯಾಸಿ ಕಲ್ಯಾಣಿನಿ
ಛಿನ್ನಾಸ್ತೇನ ಗುಣೇನ ತೇಚ ಗುಣಿತಾಃ ಜಾತಾಃ ಕತಿಸ್ಯುರ್ವದ

"ಎಲೈ, ಜಿಂಕೆಯ ಕಣ್ಣುಗಳಂತೆ ಚಂಚಲವಾದ ಕಣ್ಣುಗಳುಳ್ಳ ಲೀಲಾವತಿಯೇ, 135ನ್ನು 12ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಬಂದ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೇಳು. ಎಲೈ, ಕಲ್ಯಾಣೀ! ರೂಪ, ಸ್ಥಾನ, ವಿಭಾಗ, ಖಂಡ ಮೊದಲಾದ

ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ನೀನು ಚತುರೆಯಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಗುಣಲಬ್ಧ ಅದೇ ಗುಣಕದಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗ ಭಾಗಲಬ್ಧವೇನು ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಳು."

ನಾವು ಈಗ ಪ್ರೀ-ಯೂನಿವರ್ಸಿಟಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಹೇಳಿಕೊಡುತ್ತೇವೆ. ಶುಷ್ಕವಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು $x^2-8x-20=0$ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದರೇ ಇದೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಎರಡನೆಯ ಭಾಸ್ಕರಾ ಚಾರ್ಯ ತನ್ನ ಲೀಲಾವತೀ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ವಾರಸ್ಯವಾದ ಶ್ಲೋಕ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೇಳಿದ್ದಾನೆ.

ಪಾರ್ಥಃ ಕರ್ಣವಧಾಯ ಮಾರ್ಗಣಗಣಂ ಕ್ರುದ್ಧೋರಣೇ ಸಂಧದೇ
ತಸ್ಯಾರ್ಧೇನ ನಿವಾರ್ಯ ತಚ್ಛರಗಣಂ ಮೂಲೈಶ್ಚತುರ್ಭಿರ್ಹಯಾನ್
ಶಲ್ಯಂ ಷಡ್ಭಿರಥೇಷುಭಿಸ್ತ್ರಿಭಿರಪಿಚ್ಛತ್ರಂ ಧ್ವಜಂ ಕಾರ್ಮುಕಂ
ಚಿಚ್ಛೇದಾಸ್ಯಶಿರಃ ಶರೇಣಕತಿತೇಯಾನರ್ಜುನಃ ಸಂಧದೇ

ಮಹಾಭಾರತದ ಯುದ್ಧದಲ್ಲಿ ಅರ್ಜುನ ಕರ್ಣನನ್ನು ಕೊಲ್ಲುವುದ ಕ್ಕೋಸ್ಕರ ತನ್ನ ಬತ್ತಳಿಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕೆಲವು ಬಾಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆದ. ತೆಗೆದ ಬಾಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅರ್ಧಭಾಗದಷ್ಟು ಬಾಣಗಳನ್ನು ಕರ್ಣನ ಬಿಟ್ಟ ಬಾಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಬಂಧಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ. ಅವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲದ ನಾಲ್ಕರಷ್ಟನ್ನು ಕರ್ಣನ ಕುದುರೆಗಳ ಮೇಲೆಯೂ ಆರು ಬಾಣಗಳನ್ನು ಶಲ್ಯನ ಮೇಲೆಯೂ ಬಿಟ್ಟ. ಮತ್ತೆ ಮೂರು ಬಾಣಗಳನ್ನು ಹೊಡೆದು ಅವನ ಕೊಡೆ ಬಾವುಟ ಮತ್ತು ಬಿಲ್ಲುಗಳನ್ನು ಮುರಿದ. ಅನಂತರ ಉಳಿದ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಾಣದಿಂದ ಕರ್ಣನ ತಲೆಯನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿದ. ಹಾಗಾದರೆ ಅರ್ಜುನ ಬತ್ತಳಿಕೆಯಿಂದ ತೆಗೆದ ಬಾಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೇನು ?

ಅವನು ಬತ್ತಳಿಕೆಯಿಂದ ತೆಗೆದ ಬಾಣಗಳು x ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ.

ಕರ್ಣನ ಬಾಣಗಳನ್ನು ತಡೆಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಬಾಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ	$x/2$
ಕುದುರೆಗಳ ಮೇಲೆ ಬಿಟ್ಟದ್ದು	$4\sqrt{x}$
ಶಲ್ಯನ ಮೇಲೆ ಬಿಟ್ಟದ್ದು	6
ಕೊಡೆ ಬಾವುಟ ಮತ್ತು ಬಿಲ್ಲುಗಳಿಗೆ	3
ಕರ್ಣನನ್ನು ಕೊಲ್ಲುವುದಕ್ಕೆ	1
ಒಟ್ಟು ಬಾಣಗಳು	$\frac{x}{2}+4\sqrt{x}+6+3+1$

ಈ ಮೊತ್ತ ಅವನು ಮೊದಲು ತನ್ನ ಕೈಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಬಾಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು ಎಂದರೆ x ಆಗಿರಲೇ ಬೇಕು. ಅಂದರೆ

$$x=\frac{x}{2}+4\sqrt{x}+10$$

$$2x=x+8\sqrt{x}+20$$

$$x-8\sqrt{x}-20=0$$

$x=t^2$ ಆದರೆ

$t^2-8t-20=0$, ಬಿಡಿಸಿದರೆ $t^2=10$, $t=-2$ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಎರಡನೆಯದು ಸಾಧುವಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ $t^2=x=100$.

ಶ್ಲೋಕಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದಕ್ಕೋಸ್ಕರವೇ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುವ ಕೆಲವು ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿದ್ದರು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೇಳುವ ಕ್ರಮದಲ್ಲೇ ಹೇಳಿದರೆ ಪ್ರಾಸಬದ್ಧವಾಗಿ ಶ್ಲೋಕಗಳಿಗೆ ಹೊಂದುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ಉದ್ದೇಶಕ್ಕಾಗಿಯೇ ಮೂರು ನಾಲ್ಕು ತರಹೆಯ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಭಾರತದ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಕಲ್ಪಿಸಿದ್ದರು. ಈ ಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಕೇವಲ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಲ್ಲದೇ ಸಾಹಿತಿಗಳು, ವೇದಾಂತಿಗಳು ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದರು.

ಮೊದಲನೆಯ ಕ್ರಮ: ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಪದಗಳು.

ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ನಾಮಪದಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದಕ್ಕೋಸ್ಕರ ಬಳಸಿದ್ದಾರೆ. ಅಂತರಿಕ್ಷ ಎಂಬ ಪದ ಮತ್ತು ಆಕಾಶಕ್ಕೆ ಇರುವ ಹೆಸರುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಶೂನ್ಯವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಖ, ಶೂನ್ಯ, ಅಂತರಿಕ್ಷ, ನಭ, ಜಲಧರಪಥ.

ಭೂಮಿಗೆ ಉಪಗ್ರಹವಾಗಿ ಭೂಮಿಯ ಸುತ್ತಲೂ ಸುತ್ತುತ್ತ ಇರುವ ಚಂದ್ರ ಒಬ್ಬನೇ ಆದುದರಿಂದ ಚಂದ್ರ ಎಂಬ ಪದ ಅವನಿಗಿರುವ ಶಶಿ, ತಾರಾಧಿಪ ಮುಂತಾದ ಪದಗಳೂ ಒಂದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಭೂಮಿ, ಧರಣಿ, ಮುಂತಾದ ಭೂಮಿಗೆ ಸಮಾನಾರ್ಥಕ ಪದಗಳೂ ಒಂದು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಆದಿ ಎಂಬ ಪದವೂ ಒಂದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಶ್ವಿನೀ ದೇವತೆಗಳು ಇಬ್ಬರು. ಆದುದರಿಂದ ಅಶ್ವಿನೀ ಎಂದರೆ ಎರಡು. ಮಾನವರೆಲ್ಲರಿಗೂ ಎರಡು ಕಣ್ಣುಗಳು ಇರುವುದರಿಂದ ಕಣ್ಣು ಎಂಬ ಅರ್ಥ ಕೊಡುವ ಪದಗಳೆಲ್ಲವೂ (ಅಕ್ಷಿ, ನಯನ, ನೇತ್ರ) ಎರಡನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುವು. ಗಂಡ, ಹೆಂಡತಿ ಎಂಬ ಎರಡು ಮನುಷ್ಯರಿಂದ ಕುಟುಂಬವಾಗುವುದು. ಆದುದರಿಂದ ಕುಟುಂಬ ಎಂದರೂ ಎರಡೇ ಮನುಷ್ಯನಿಗೆ ಎರಡು ಕೈಗಳು ಇರುವುದರಿಂದ ಕರ, ಹಸ್ತ ಮುಂತಾದ ಪದಗಳು ಎರಡನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

ದೇವರ ಅವತಾರಗಳಲ್ಲಿ ಮೂರು ರಾಮಾವತಾರಗಳುಂಟು ಪರಶುರಾಮ, ಶ್ರೀರಾಮ ಮತ್ತು ಬಲರಾಮ. ಆದುದರಿಂದ ರಾಮ ಎಂಬ ಪದ ಮೂರನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಅಚೇತನ ವಸ್ತುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಮೂರು ಗುಣಗಳಾದ ಸತ್ವ, ರಜಸ್ಸು ಮತ್ತು ತಮಸ್ಸು ಇವುಗಳಿಂದ ಕೂಡಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಗುಣ ಎಂಬುದು ಮೂರನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ವೇದಗಳಲ್ಲಿ ಗಾರ್ಹ-ಪತ್ಯವಾಜಸನೇಯ ಎಂಬ ಮೂರು ರೀತಿಯ ಅಗ್ನಿಗಳುಂಟು. ಸ್ವರ್ಗ, ಮತ್ಸ್ಯ, ಪಾತಾಳ ಎಂದು ಮೂರು ಲೋಕಗಳುಂಟು. ಆದುದರಿಂದ ಅಗ್ನಿ, ಲೋಕ ಈ ಎರಡು ಪದಗಳೂ ಮೂರನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

ಋಗ್ವೇದ, ಯಜುರ್ವೇದ, ಸಾಮವೇದ ಮತ್ತು ಅಥರ್ವಣವೇದ ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ವೇದಗಳಿವೆ. ಕೃತ, ತ್ರೇತಾ, ದ್ವಾಪರ ಮತ್ತು ಕಲಿ ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಯುಗಗಳಿವೆ. ಪೂರ್ವ, ಪಶ್ಚಿಮ, ಉತ್ತರ ಮತ್ತು ದಕ್ಷಿಣ ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ದಿಕ್ಕುಗಳು. ಆದುದರಿಂದ ವೇದ, ಯುಗ, ದಿಕ್ ಈ ಮೂರು ಪದಗಳೂ ನಾಲ್ಕನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುವು

ಪಾಂಡವರು ಐದು ಜನ; ಕಣ್ಣು, ಕಿವಿ, ಮೂಗು, ರಸ, ಸ್ಪರ್ಶ ಎಂದು ಐದು ಜ್ಞಾನೇಂದ್ರಿಯಗಳು; ಆಕಾಶ, ವಾಯು, ಅಗ್ನಿ, ನೀರು ಮತ್ತು ಭೂಮಿ ಎಂದು ಇರುವುದು ಪಂಚಭೂತಗಳು; ಮನ್ಮಥನಿಗೆ ಇರುವುದು ಐದು ಬಾಣಗಳು. ಈ ಎಲ್ಲ ಕಾರಣಗಳಿಂದ ಐದು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಾಂಡವ, ಇಂದ್ರಿಯ, ಭೂತ ಮತ್ತು ಬಾಣ ಎಂಬ ನಾಮ ಪದಗಳು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ ರಸಗಳು ಆರು. ದರ್ಶನಗಳು ಆರು, ಷಣ್ಮುಖನಿಗೆ ಮುಖಗಳು ಆರು. ಆದ್ದರಿಂದ ರಸ, ದರ್ಶನ, ಷಣ್ಮುಖ ಎಂಬ ನಾಮ ಪದಗಳು ಆರನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಹೀಗೆಯೇ ಧಾತುಗಳು ಏಳು. ದೇವರ್ಷಿಗಳು ಅಥವಾ ದೇವಲೋಕದ ಮುನಿಗಳು ಏಳು. ಆದ್ದರಿಂದ ಧಾತು, ಮುನಿ ಎಂಬ ನಾಮಪದಗಳು ಏಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಅಷ್ಟ ವಸುಗಳು ದಿಗ್ಗಜಗಳು, ಇದರಿಂದ ಎಂಟಕ್ಕೆ ವಸು, ಗಜ ಮುಂತಾದ ನಾಮಪದಗಳೂ, ನವನಂದರು, ನವಗ್ರಹಗಳು ಇವುಗಳಿಂದ ಒಂಭತ್ತಕ್ಕೆ ನಂದ, ಗ್ರಹ ಎಂಬ ಪದಗಳೂ ಸೂಚಕವಾಗುತ್ತವೆ.

ಸಂಸ್ಕೃತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಇಂಥ ನಾಮಪದಗಳು ಹೇರಳವಾಗಿ ಸಿಕ್ಕುತ್ತವೆ. ಮೇಲೆ ಬರೆದಂತೆ ಇನ್ನೂ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪದಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ ರೂಢಿಗೆ ಬಂದ ಮೇಲೆ ಒಂದರಿಂದ ಒಂಭತ್ತರ ವರೆಗಿನಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೆಗೆದು ಕೊಂಡು ಶೂನ್ಯವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಆಕಾಶ ಖ ಮುಂತಾದ ಪದಗಳಿಂದಲೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಆರಂಭಿಸಿದರು. ಹೀಗೆ ಬರೆಯುವಾಗ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ ಓದಬೇಕೆಂಬ ನಿಯಮವಿರುತ್ತಿತ್ತು (ಅಂಕಾನಾಂ ವಾಮತೋಗತಿಃ).

ಉದಾಹರಣೆಗೆ 1234, ಸಾವಿರದ ಇನ್ನೂರ ಮೂವತ್ತನಾಲ್ಕು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ 'ವೇದರಾಮ ಕುಟುಂಬಾದಿ' ಎಂದು ಹೇಳಬೇಕಾಗುವುದು. ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ ಇಲ್ಲಿ ನಾಮಪದಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆದರೆ ಆದಿ ಎಂದರೆ 1, ಕುಟುಂಬ ಎಂದರೆ 2, ರಾಮ ಎಂದರೆ 3 ಮತ್ತು ವೇದ ಎಂದರೆ 4 ಆಗುತ್ತದೆ. ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ ಓದಿದರೆ ವೇದರಾಮಕುಟುಂಬಾದಿ ಎಂದು ಓದಬೇಕು. ಆಗ ಅದು 1234 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಶ್ಲೋಕಗಳಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಷ್ಟು ಸಮರ್ಪಕವಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವೇ ಸ್ವತಃ ಊಹಿಸಿ ಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಈ ಶಬ್ದದ ನಿಜವಾದ ರೂಪದ ಉಚ್ಚಾರ ಅಷ್ಟು ಹಿತಕರವೂ ಅಲ್ಲ. ಅಲ್ಲದೇ ಅದು ಪ್ರಾಸಬದ್ಧವಾಗಿಯೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ಆದರೆ ಯಾವಾಗ ಒಂದು ಪದ ಸಮೂಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು, ಯಾವಾಗ ನಾಮಪದಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ನೋಡಿ ನಾವು ಊಹಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಗ್ರೀಕ್ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಉದ್ದನೆಯ ಗೀಟನ್ನಾಗಲೀ, ಆ ಪದಗಳ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಗೀಟನ್ನಾಗಲೀ ಹಾಕುತ್ತಿದ್ದರೂ, ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅಂಥ ಗುರುತುಗಳೇನೂ ಕಂಡು ಬರುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ ರಾಮ ಎಂಬ ಪದ ರಾಮನೆಂಬ ಮನುಷ್ಯನನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೋ ಇಲ್ಲವೇ ಮೂರು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದೋ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಂದರ್ಭದಿಂದ ತಿಳಿಯಬೇಕು.

158,22,37,800 ನೂರಐವತ್ತೆಂಟು ಕೋಟಿ ಇಪ್ಪತ್ತೆರಡುಲಕ್ಷದ ಮೂವತ್ತೇಳು ಸಾವಿರದ ಎಂಟನೂರು ಎಂಬ ಈ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಒಂದು ಶ್ಲೋಕದ ಪೂರ್ವಾರ್ಧವಾಗಿ

ಖಖಾಷ್ಟಮುನಿರಾಮಾಶ್ವಿನೇತ್ರಾಷ್ಟಶರರಾತ್ರಿಪಃ

ಎಂದು ಪುಲಿಶ ಸಿದ್ಧಾಂತದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ (ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ ಇದನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು)

1	5	8	2	2	3	7	8	0	0
ರಾತ್ರಿಪ (ಚಂದ್ರ)	ಶರ	ಅಷ್ಟ	ನೇತ್ರ	ಅಶ್ವಿ (ಅಶ್ವಿನಿ ದೇವತೆ)	ರಾಮ	ಮುನಿ	ಅಷ್ಟ	ಖ	ಖ

ಎರಡನೆಯ ಕ್ರಮ : ಅಂಕಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಅಕ್ಷರಗಳು.

ಕಟಪಯಾದಿ ಕ್ರಮ

ಸದ್ರತ್ನಮಾಲಾ ಎಂಬ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ವಿವರಿಸುವ ಒಂದು ಶ್ಲೋಕವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ನಞಾವಚಶ್ಚ ಶೂನ್ಯಾನಿ ಸಂಖ್ಯಾ ಕಟಪಯಾದಯಃ
ಮಿಶ್ರೇತೂಪಾಂತ್ಯಹಲ್ ಸಂಖ್ಯಾ ನ ಚಚಿಂತ್ಯಾ ಹಲಸ್ವರಾಃ

ನ, ಞ ಎಂಬ ಅಕ್ಷರಗಳೂ ಸ್ವರಗಳೂ ಶೂನ್ಯವನ್ನೂ, ಕ, ಟ, ಪ, ಯ ಮುಂತಾದ ಅಕ್ಷರಗಳು ಒಂದರಿಂದ ಒಂಭತ್ತರೊಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಒತ್ತಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ವ್ಯಂಜನಾಕ್ಷರವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ವ್ಯಂಜನಗಳಿಗೆ ಸೇರಿಸಿರುವ ಸ್ವರಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಾರದು.

ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯ ಮೂಲಕ ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ಕ	ಖ	ಗ	ಘ	ಙ	ಚ	ಛ	ಜ	ಝ	ಞ
ಟ	ಠ	ಡ	ಢ	ಣ	ತ	ಥ	ದ	ಧ	ನ
ಪ	ಫ	ಬ	ಭ	ಮ	—	—	—	—	—
ಯ	ರ	ಲ	ವ	ಶ	ಷ	ಸ	ಹ		

ಕ, ಟ, ಪ, ಯ ಎಂಬ ಈ ನಾಲ್ಕು ಅಕ್ಷರಗಳು ಒಂದನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುವು. ಆದುದರಿಂದಲೇ ಇದಕ್ಕೆ ಕಟಪಯಾದಿ ಕ್ರಮ ಎಂದು ಹೆಸರು ಬಂದಿದೆ. ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಆಯಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೆಳಗೆ ಬರೆದಿರುವ ಅಕ್ಷರಗಳೆಲ್ಲ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುವು.

ಉದಾ ಖ, ಠ, ಫ, ರ — ಇವು ಎರಡನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುವು.

ಗ, ಡ, ಬ, ಲ — ಇವು ಮೂರನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುವು, ಇತ್ಯಾದಿ.

ಈ ಕ್ರಮ ಹಿಂದೆ ಹೇಳಿದ ಪದಕ್ರಮಕ್ಕಿಂತ ಉತ್ತಮವಾಗಿದೆ ಅನೇಕ ಕವಿಗಳು ಈ ಪದ್ಧತಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಗಾನಮಾಧುರ್ಯದಿಂದ ಕೂಡಿದ ಪದಗಳ ಮೂಲಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಇಂಥ ಪದಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದ ಶ್ಲೋಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಪದ್ಧತಿಯ ಪ್ರಕಾರ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನ ಹೆಸರೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

ಉದಾ ರಾಘವ — 442

2 4 4

'ಅಂಕಾನಾಂ ವಾಮತೋ ಗತಿಃ' ಎಂಬ ನಿಯಮವನ್ನನುಸರಿಸಿ ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಓದಬೇಕು. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ವ ಎಂದರೆ 4, ಘ ಎಂದರೆ 4, ರಾ ಎಂದರೆ 2. ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ ಓದಿದರೆ ರಾಘವ ಎಂಬ ಪದ 442 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಪದ್ಮನಾಭ — 4051

1 5 0 4

ಇಲ್ಲಿ ದ ಅಕ್ಷರಕ್ಕೆ ಮ ಒತ್ತನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಕೊನೆಯ ಅಕ್ಷರವಾದ ಮ ಮಾತ್ರ ಗಣನೆಗೆ ಬಂದು, ದ ಅಕ್ಷರವನ್ನು ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ ಬಿಡಬೇಕಾಗುವುದು.

ಹದಿನಾಲ್ಕನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿದ್ದ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಶ್ರೀ ವೈಷ್ಣವ ಸಿದ್ಧಾಂತ ಸ್ಥಾಪಕರಾದ ನಿಗಮಾಂತಮಹಾದೇಶಕರು ಬ್ರಹ್ಮಸೂತ್ರಗಳಿಗೆ ರಾಮಾ

ನುಜಾಚಾರ್ಯರ ಅಭಿಪ್ರಾಯದಂತೆ ಅರ್ಥವನ್ನು ವಿವರಿಸಲು ಅಧಿಕರಣ ಸಾರಾವಳಿ ಎಂಬ ಗ್ರಂಥವನ್ನು ರಚಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಗ್ರಂಥದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಬ್ರಹ್ಮಸೂತ್ರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತಿಳಿಸಲು ಒಂದು ಶ್ಲೋಕವನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ. ಆ ಶ್ಲೋಕದಲ್ಲಿ ಕಟಪಯಾದಿ ಕ್ರಮವನ್ನು ಮತ್ತು ಹಿಂದೆ ಹೇಳಿದ ಪದಕ್ರಮವನ್ನೂ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದಾರೆ.

ವೇದಗಳಿಗೆ ಅರ್ಥವನ್ನು ಹೇಳುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಚರ್ಚಿಸುವ ಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಮೀಮಾಂಸಾಶಾಸ್ತ್ರವೆಂದು ಹೆಸರು. ಇದರಲ್ಲಿ ಇಪ್ಪತ್ತು ಅಧ್ಯಾಯಗಳಿವೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಹದಿನಾರು ಅಧ್ಯಾಯಗಳು ಯಾಗ ಯಜ್ಞಗಳನ್ನು ಮಾಡುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸುವ ಕರ್ಮಕಾಂಡ. ಆ ಯಜ್ಞಗಳಲ್ಲಿ ಪೂಜಿಸಲ್ಪಡುವ ನಾನಾ ದೇವತೆಗಳ ವಿಚಾರವೂ ಆ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಕೊನೆಯ ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳು ಅತಿ ಮುಖ್ಯವಾದ ಬ್ರಹ್ಮಕಾಂಡ. ವೇದಾಂತಿಗಳು ಈ ಬ್ರಹ್ಮಕಾಂಡಕ್ಕೆ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಪರಬ್ರಹ್ಮವಿಚಾರವನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ಈ ನಾಲ್ಕು ಅಧ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ನಾಲ್ಕು ಪಾದಗಳಿವೆ ಎಂದರೆ ಬ್ರಹ್ಮಕಾಂಡದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಹದಿನಾರು ಪಾದಗಳಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪಾದದಲ್ಲೂ ಅಧಿಕರಣಗಳೆಂಬ ವಿಭಾಗಗಳುಂಟು. ಈ ಹದಿನಾರು ಪಾದಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದರಲ್ಲೂ ಎಷ್ಟು ಅಧಿಕರಣಗಳಿವೆ ಮತ್ತು ಬ್ರಹ್ಮಕಾಂಡದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಇರುವ ಅಧಿಕರಣಗಳೆಷ್ಟು ಮತ್ತು ಬ್ರಹ್ಮ ಕಾಂಡದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಇರುವ ಬ್ರಹ್ಮಸೂತ್ರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಷ್ಟು ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಶ್ಲೋಕವನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ.

ಸೌತ್ರೀ ಸಂಖ್ಯಾ ಶುಭಾಶೀಃ ಅಧಿಕೃತಿಗಣನಾ ಚಿನ್ಮಯೀ ಬ್ರಹ್ಮಕಾಂಡೇ
ತಾದರ್ಥ್ಯೇ ऽ ನಂತರತ್ವೇऽ ಪ್ಯಧಿಕರಣಭಿದಾ ನಾಲ್ಪಸಾರೈಃ ಪ್ರಕಲ್ಪ್ಯಾ
ಅಕ್ಷೋರ್ಮ್ಯಾ ಶಾಹಿಕಾಷ್ಠಾ ದ್ವಿರದಮುನಿವಸೂಪರ್ಯದ್ರಿ ಶತ್ರಾತ್ವತಿಶಕ್ಷ
ರ್ಯಕ್ಷ್ಯೈ ರಕ್ಷ್ಯೈ ಪ್ರಯಾಜ್ಯೈರಿಹ ಭವತಿರಸೈಃ ಪಾದನೀತಿ ಪ್ರಬಂಧಃ

ಈ ಶ್ಲೋಕದ ಮೊದಲನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ "ಶುಭಾಶೀಃ", "ಚಿನ್ಮಯೀ" ಎಂಬ ಪದಗಳು ಕಟಪಯಾದಿಕ್ರಮದಲ್ಲಿವೆ. "ಸೌತ್ರೀ ಸಂಖ್ಯಾ ಶುಭಾಶೀಃ" ಎಂದರೆ ಬ್ರಹ್ಮಸೂತ್ರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

ಶುಭಾಶೀಃ--545
↓ ↓ ↓
5 4 5

ಒಟ್ಟು ಅಧಿಕರಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಚಿನ್ಮಯೀ—156
↓ ↓ ↓
6 5 1

(48ನೆಯ ಪುಟದಲ್ಲಿರುವ ಪಟ್ಟಿ ನೋಡಿ)

ಗ್ರಂಥದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಈ ಶ್ಲೋಕವಿರುವುದರಿಂದ "ಶುಭಾಶೀಃ" (ಶುಭಾಶಯಗಳು) ಎಂಬ ಅರ್ಥವಿರುವ ಈ ಪದವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವುದು ಸ್ವಾರಸ್ಯವಾಗಿದೆ. ವೇದಾಂತವಿಚಾರವನ್ನು ಈ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಚೈತನ್ಯಮಯವೆಂಬ ಅರ್ಥ ಬರುವ 'ಚಿನ್ಮಯೀ' ಎಂಬ ಪದದ ಮೂಲಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಿರುವುದೂ ಅರ್ಥಗರ್ಭಿತವಾಗಿದೆ.

ಇನ್ನು ಉತ್ತರಾರ್ಧದಲ್ಲಿ ಹದಿನಾರು ಪಾದಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ಎಷ್ಟು ಅಧಿಕರಣಗಳಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಮುಂಚೆ ಹೇಳಿದ ಪದಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿದೆ.

ಹಿಂದೆ ದಿಕ್ ಎಂದರೆ ನಾಲ್ಕು ಎಂದು ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿತ್ತು. ಆದರೆ ಆಶಾಃ ಎಂದರೆ ಹತ್ತು ಎಂಬ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ಎಂದರೆ ದಿಕ್ಕುಗಳನ್ನು ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿರುವ ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟದೆ (ಅಂದರೆ ಪೂರ್ವ, ಪಶ್ಚಿಮ, ಉತ್ತರ, ದಕ್ಷಿಣ, ಆಗ್ನೇಯ, ನೈರುತ್ಯ, ವಾಯುವ್ಯ, ಈಶಾನ್ಯ, ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಕೆಳಗೆ).

ಮೊದಲನೆಯ ಪಾದದಲ್ಲಿ ಅಧಿಕರಣಗಳು ಹನ್ನೊಂದಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅಕ್ಷ ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದೆ. ಅಕ್ಷ ಎಂದರೆ ಇಂದ್ರಿಯಗಳು.

ಇಂದ್ರಿಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹನ್ನೊಂದು. ಜ್ಞಾನೇಂದ್ರಿಯಗಳು ಐದು, ಕರ್ಮೇಂದ್ರಿಯಗಳು ಐದು ಮತ್ತು ಮನಸ್ಸು. ಎರಡನೆಯ ಪಾದದಲ್ಲಿರುವ ಅಧಿಕರಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಆರು ಎಂಬುದನ್ನು ಊರ್ಮಿ ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದೆ (ಷಡೂರ್ಮಿಗಳು — ಕಾಮ, ಕ್ರೋಧ, ಲೋಭ, ಮದ, ಮೋಹ ಮತ್ತು ಮಾತ್ಸರ್ಯ). ಹೀಗೆಯೇ ಮೂರನೆಯ ಪಾದದಿಂದ ಹದಿನಾರನೆಯ ಪಾದದವರೆಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ 10, 8, 10, 8, 7, 8, 6, 8, 25, 15, 11, 11, 5 ಮತ್ತು 6 ಎಂಬುದನ್ನು ಪದ್ಯದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಆಶಾ, ಅಹಿ, ಕಾಷ್ಠಾ, ದ್ವಿರದ, ಮುನಿ, ವಸು, ಊರ್ಮಿ, ಅದಿ, ತತ್ವ, ಅತಿಶಕ್ವರೀ, ಅಕ್ಷ, ಅಕ್ಷ, ಪ್ರಯಾಜ ಮತ್ತು ರಸ ಎಂಬ ಪದಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದೆ.

ಮೂರನೆಯ ಕ್ರಮ : ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಅಕ್ಷರಗಳು.

ಕ್ರಿ. ಶ. 499ರಲ್ಲಿದ್ದ ಮೊದಲನೆಯ ಆರ್ಯಭಟ್ಟ ತಾನು ಬರೆದಿರುವ ಖಗೋಳ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ತಾನೇ ಕಲ್ಪಿಸಿರುವ ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ಹೀಗೆ ವಿವರಿಸಿದ್ದಾನೆ.

ವರ್ಗಾಕ್ಷರಾಣಿ ವರ್ಗೇ ಅವರ್ಗೇ ಅವರ್ಗಾಕ್ಷರಾಣಿ ಕಾತ್ ಙ್ಮೌ ಯಃ।
ಖದ್ವಿನವಕೇಸ್ವರಾ ನವ ವರ್ಗೇ ಅವರ್ಗೇ ನವಾಂತ್ಯ ವರ್ಗೇವಾ

ಕಕಾರದಿಂದ ಹಿಡಿದು ಮಕಾರದವರೆಗಿನ ಅಕ್ಷರಗಳು ವರ್ಗಾಕ್ಷರಗಳು. ಯ, ರ, ಲ, ವ ಮುಂತಾದ ಅಕ್ಷರಗಳು ಅವರ್ಗಾಕ್ಷರಗಳು. ಒಟ್ಟು ಹದಿನೆಂಟು ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿ ಇವನ್ನು ಒಂಬತ್ತು ಜೋಡಿಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೋಡಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದು ವರ್ಗಸ್ಥಾನ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅವರ್ಗಸ್ಥಾನ ಇರುತ್ತದೆ (ಒಂಬತ್ತು ಸ್ವರಗಳನ್ನು ಒಂಭತ್ತು ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ). ಕಕಾರದಿಂದ ಹಿಡಿದು ಮಕಾರದವರೆಗಿನ ಅಕ್ಷರಗಳು ಒಂದರಿಂದ ಇಪ್ಪತ್ತೈದರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಯಕಾರದಿಂದ ಹಿಡಿದು ಹಕಾರದ ವರೆಗಿರುವ ಅಕ್ಷರಗಳು ಮೂರರಿಂದ ಹತ್ತರ ವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸೂಚಕ

ವಾಗಿವೆ. ವರ್ಗಾಕ್ಷರ ಒಂದು ಸ್ವರದಿಂದ ಕೂಡಿದಾಗ ಆ ಜೋಡಿಯು ಸ್ಥಾನವನ್ನೂ ಅಂದರೆ ವರ್ಗಸ್ಥಾನವನ್ನೂ ಅದೇ ಸ್ವರ ಒಂದು ಅವರ್ಗಾಕ್ಷರದೊಡನೆ ಕೂಡಿದರೆ ಆ ಜೋಡಿಯು ಅವರ್ಗಸ್ಥಾನವನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುವುವು.

ಸ್ಥಾನಸೂಚಕ ಸ್ವರಗಳು

ಔ		ಓ		ಐ		ಏ		ಌ		ಋ		ಉ		ಇ		ಅ	
ಅ	ವ	ಅ	ವ	ಅ	ವ	ಅ	ವ	ಅ	ವ	ಅ	ವ	ಅ	ವ	ಅ	ವ	ಅ	ವ
10^{17}	10^{16}	10^{15}	10^{14}	10^{13}	10^{12}	10^{11}	10^{10}	10^{9}	10^{8}	10^{7}	10^{6}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	10^{2}	10	1

1 ↓	2 ↓	3 ↓	4 ↓	5 ↓
ಕ್	ಖ್	ಗ್	ಘ್	ಙ್
6 ↓	7 ↓	8 ↓	9 ↓	10 ↓
ಚ್	ಛ್	ಜ್	ಝ್	ಞ್
ಟ್ ↓	ಠ್ ↓	ಡ್ ↓	ಢ್ ↓	ಣ್ ↓
11	12	13	14	16
ತ್	ಥ್	ದ್	ಧ್	ನ್
16 ↑	17 ↑	18 ↑	19 ↑	20 ↑
ಪ್	ಫ್	ಬ್	ಭ್	ಮ್
21 ↑	22 ↑	23 ↑	24 ↑	25 ↑

ಈ ವರ್ಗಾಕ್ಷರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಒಂದರಿಂದ ಇಪ್ಪತ್ತೈದರ ವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

ಯ್,	ರ್,	ಲ್,	ವ್,	ಶ್,	ಷ್,	ಸ್,	ಹ್
3	4	5	6	7	8	9	10

ಇವು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮೂರರಿಂದ ಹತ್ತರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಂಜನಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಅರ್ಧಾಕ್ಷರಗಳನ್ನಾಗಿ ಭಾವಿಸಬೇಕು. ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಒಂಬತ್ತು ಸ್ವರಗಳನ್ನೂ ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಬರೆದಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸ್ವರವೂ ಎರಡೆರಡು ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಸ್ವರ	ವರ್ಗಸ್ಥಾನ		ಅವರ್ಗಸ್ಥಾನ	
ಅ ಎಂಬುದು—ಏಕ	(10^0)	ಮತ್ತು ದಶ	(10^1)	ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನೂ
ಇ ಎಂಬುದು—ಶತ	(10^2)	ಮತ್ತು ಸಹಸ್ರ	(10^3)	ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನೂ
ಉ ಎಂಬುದು—ದಶಸಹಸ್ರ	(10^4)	ಮತ್ತು ಲಕ್ಷ	(10^5)	ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನೂ

ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ (ಹೀಗೆಯೇ ಔ ವರೆಗಿನ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನೂ ಭಾವಿಸಬೇಕು).

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಏಕ, ಶತ, ದಶ, ಸಹಸ್ರ...., ಇವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ವರ್ಗಸ್ಥಾನಗಳು. $(10^0, 10^2, 10^4, 10^6, \ldots)$ ದಶ, ಸಹಸ್ರ, ಲಕ್ಷ, ಕೋಟಿ, ... $(10^1, 10^3, 10^5, 10^7, \ldots, 10^{17})$ ಇವೆಲ್ಲವೂ ಅವರ್ಗಸ್ಥಾನಗಳು. ವರ್ಗಾಕ್ಷರವನ್ನು ಸ್ವರದೊಡನೆ ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಆ ವರ್ಗಾಕ್ಷರ ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದೇ ಸ್ವರಕ್ಕೆ ಸೇರಿದ ವರ್ಗ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಯೂ ಅದೇ ಸ್ವರದೊಡನೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಅವರ್ಗಾಕ್ಷರ ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆ ಸ್ವರಕ್ಕೆ ಸೇರಿದ ಅವರ್ಗಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಯೂ ಬರೆಯಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಗ್ ಎಂಬ ವರ್ಗ ವ್ಯಂಜನ ಮೂರನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ವ್ ಎಂಬ ಅವರ್ಗ ವ್ಯಂಜನ ಆರನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

ಈಗ ಗ = ಗ್ + ಅ = $3 \times 1 = 3$

ವ = ವ್ + ಅ = $6 \times 10 = 60$

ಅ ಎಂಬ ಸ್ವರದೊಂದಿಗೆ ಏಕಸ್ಥಾನ (ವರ್ಗಸ್ಥಾನ 10^0) ಮತ್ತು ದಶಸ್ಥಾನ (ಅವರ್ಗಸ್ಥಾನ 10^1)ಗಳು ಸೇರಿವೆ. ವರ್ಗಾಕ್ಷರವಾದ ಗ್ ಅನ್ನು ಆ ಸ್ವರದ ಜೊತೆಯಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಿದರೆ, ಗ ಎಂಬ ಅಕ್ಷರ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಮೂರನ್ನು ಎಂದರೆ (3×1) ಅನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಆದರೆ ಆರನ್ನು

ಸೂಚಿಸುವ ಅವರ್ಗಾಕ್ಷರವಾದ ವ್ ಅನ್ನು ಅ ಸ್ವರದೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಸಿ ಬರೆದಾಗ ವ ಎಂಬ ಅಕ್ಷರ ದಶಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಆರನ್ನು ಎಂದರೆ (6×10) ಅನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

ಇ ಸ್ವರದೊಂದಿಗೆ ಶತ (10^2) ಮತ್ತು ಸಹಸ್ರ ಸ್ಥಾನಗಳು ಸೇರಿವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಶತ ಸ್ಥಾನ ವರ್ಗಸ್ಥಾನ ಮತ್ತು ಸಹಸ್ರಸ್ಥಾನ ಅವರ್ಗಸ್ಥಾನ. ವರ್ಗಾಕ್ಷರವನ್ನು ಇ ಸ್ವರದೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಸಿ ಬರೆದಲ್ಲಿ ಆಗುವ ಆ ವರ್ಗ ವ್ಯಂಜನ ಶತಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ ಗ್ + ಇ $= 3 \times 10^2$

ಗಿ $= 300$

ಗಿ ಎಂಬುದು ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿದಂತೆ 300 ಅನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ಹಾಗೆಯೇ ಅವರ್ಗವ್ಯಂಜನ ಇ ಎಂಬ ಸ್ವರದೊಡನೆ ಸೇರಿದಾಗ ಆಗುವ ವ್ಯಂಜನ ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಹಸ್ರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು.

ಉದಾ ವ್ + ಇ $= 6^1 \times 10^3 = 6000$

ಎಂದರೆ ವಿ ಎಂಬ ವ್ಯಂಜನ ಆರುಸಾವಿರ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಆರ್ಯಭಟೀಯವೆಂಬ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಆರ್ಯಭಟ್ಟ ಈ ಪದ್ಧತಿಯ ಪ್ರಕಾರ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಖ್ಯುಘೃ ಮತ್ತು ಚಯಗಿಯಿ ಙುಶುಳೃಲ್ಕೃ ಎಂಬುವು ಈ ಪದ್ಧತಿಯ ಪ್ರಕಾರ ಸೂಚಿಸಿದ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇನು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಖ್ಯುಘೃ $=$ (ಖ್ + ಯ್ + ಘೃ)

ಇಲ್ಲಿ ಖ್ ಎಂಬ ವರ್ಗಾಕ್ಷರ, ಯ್ ಎಂಬ ಅವರ್ಗಾಕ್ಷರ, ಇವೆರಡನ್ನೂ ಉ ಎಂಬ ಸ್ವರದೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಸಿದೆ. ಘ್ ಎಂಬುದು ವರ್ಗಾಕ್ಷರ, ಇದನ್ನು ಋ ಎಂಬ ಸ್ವರದೊಂದಿಗೆ ಸೇರಿಸಿದೆ.

ಋ ಉ ಇ ಅ

ಅ ವ ಅ ವ ಅ ವ ಅ ವ

10^7 10^6 10^5 10^4 10^3 10^2 10^1 10^0

↓ ↓ ↓

ಘ್ ಯ್ ಖ್

↓ ↓ ↓

4 3 2

ಖ್ — 2
ಯ್ — 3
ಘ್ — 4

ಖ್ಯುಘೃ $= 4 \times 10^6 + 3 \times 10^5 + 2 \times 10^4$
$= 4320000$

ಚಯಗಿಯಿ ಙುಶುಛ್ಲೃ $= 57753336$

ಲೃ ಋ ಉ ಇ ಅ

ಅ ವ ಅ ವ ಅ ವ ಅ ವ ಅ ವ

10^9 10^8 10^7 10^6 10^5 10^4 10^3 10^2 10 1

ಲ್ ಛ್ ಶ್ ಙು ಯ್ ಗ್ ಯ್ ಚ್

5 7 7 5 3 3 3 6

ಈ ಕ್ರಮ ಒಂದನೆಯ ಆರ್ಯಭಟ್ಟನ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಪಾಂಡಿತ್ಯದಿಂದ ರಚಿತವಾದ ಅದ್ವಿತೀಯ ಕ್ರಮ. ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದಾದರೂ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಸುಲಭವಾಗಿರುವ ಒಂದು ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ, ದೊಡ್ಡ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಎಂದು ಯೋಚಿಸಿ, ಸೃಷ್ಟಿಸಿರತಕ್ಕ ಒಂದು ಕ್ರಮ ಇದು. ನಲವತ್ತ ಮೂರು ಲಕ್ಷದ ಇಪ್ಪತ್ತು ಸಾವಿರ ಎಂಬ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಖ್ಯುಘೃ ಎಂಬ ಎರಡು ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಬರೆಯತಕ್ಕ ಪ್ರಭಾವವಿದೆ, ಈ ಆರ್ಯಭಟ್ಟನ ವಿಶ್ವಾಮಿತ್ರ ಸೃಷ್ಟಿಗೆ. ಆದರೆ ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲೆರಡು ಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಮಧುರವಾದ ಪದಗಳಿಂದ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಅರ್ಹತೆ ಇಲ್ಲ. ಅಲ್ಲದೇ ಇದರಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನಾಗಲೀ, ಬೇರೆ ಬೇರೆ

ಪದಗಳನ್ನಾಗಲೀ ಬರೆಯುವ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ ಇಲ್ಲ. ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಮೊದಲ ಎರಡು ಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಂಜನಗಳ ಜೊತೆಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸ್ವರಗಳಿಗೆ ಬೆಲೆ ಇರಲಿಲ್ಲ ಈ ರೀತಿ ಇರುವುದರಿಂದ ಶ, ಶಾ, ಶೀ ಎಂಬಂತೆ ಯಾವುದೇ ವ್ಯಂಜನವಾದರೂ ಯಾವುದೇ ಸ್ವರದೊಂದಿಗೆ ಕೂಡಿದಾಗಲೂ ಆ ವ್ಯಂಜನಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಬೆಲೆ ಇರುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ಆರ್ಯಭಟ್ಟನ ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ವರಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಪ್ರಮುಖ ಸ್ಥಾನ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸ್ವರವೂ ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯ ಎರಡೆರಡು ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಾಹಿತಿಗಳಿಗೆ ಈ ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಮ ಉಪಯೋಗವಾಗಲಿಲ್ಲ. ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಕ್ರಮಗಳು ಬಹಳ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಕವಿಗಳಿಂದ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟು ಪ್ರಾಮುಖ್ಯಗಳಿಸಿತು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಅರಸಿಕರು (dry) ಎಂಬ ಜನಭಿಪ್ರಾಯ ಇದೆ. ಇದು ಎಲ್ಲ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸದಿರಬಹುದು ಆದರೆ ಇರುವುದನ್ನು ಇರುವ ಹಾಗೆಯೇ ಹೇಳುವ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನಿಗೆ ಬಣ್ಣ ಕಟ್ಟಿ ಹೇಳುವ ಕಲೆ ಬಲು ದೂರ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಒಣಗಿದ ಮರವನ್ನು ಒಣ್ಣಿಸೆಂದು ಬಾಣನು ತನ್ನ ಮಗನಿಗೆ ಹೇಳುವಾಗಿನ ಪ್ರಸಂಗ ನೆನಪಿಗೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಕಾದಂಬರೀ ಗ್ರಂಥವನ್ನು ಅರ್ಧ ಬರೆದಿದ್ದಾಗಲೇ ಬಾಣನು ಮರಣಶಯ್ಯೆಯಲ್ಲಿದ್ದು ಆ ಗ್ರಂಥವನ್ನು ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡಲು ತನ್ನ ಮಗನ ಕೈಯಲ್ಲಿ ಶಕ್ತಿ ಇದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದ ಒಣಗಿದ ಮರವನ್ನು ಬಣ್ಣಿಸು ಎಂದನಂತೆ. ಮಗನು ಅದನ್ನು ಸ್ವಾರಸ್ಯವಾಗಿ ಬಣ್ಣ ಕಟ್ಟಿ ವರ್ಣಿಸಿದಾಗ ಆತ ಸಂತೋಷದಿಂದ ಪ್ರಾಣ ಬಿಟ್ಟನೆಂದು ಪ್ರತೀತಿ. ರಸ, ಭಾವ, ಇವುಗಳ ಅರಿವಿಲ್ಲದವನು 'ಶುಷ್ಕೋ ವೃಕ್ಷಃ ತಿಷ್ಠತ್ಯಗ್ರೇ' (ಒಣಗಿದ ಮರವು ಮುಂದೆ ನಿಂತಿದೆ) ಎಂಬ ವರ್ಣನೆಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಹೇಳಲಾಗುತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ. ಆರ್ಯಭಟ್ಟನ ಕ್ರಮ ಸ್ವಲ್ಪ ನೀರಸವಾಗಿಯೇ ಇದೆ ಎನ್ನಬಹುದು. ಇದರ ಉಪಯೋಗ ಬರಿಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕಷ್ಟೇ ಸೀಮಿತವಾಗಿದೆಯೇ ಹೊರತು ಸಾಹಿತ್ಯ ಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸತಕ್ಕ ಅರ್ಹತೆ ಇಲ್ಲ.

ಮೇಲೆ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಿದ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ ಪದಕ್ರಮವನ್ನಾಗಲೀ ಕಟಪಯಾದಿಕ್ರಮವನ್ನಾಗಲೀ ಕಂಡುಹಿಡಿದವರು ಯಾರು ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಮಹಾಭಾರತದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಈ ಶ್ಲೋಕ ಬರುತ್ತದೆ: ದೇವೀಂ ಸರಸ್ವತೀಂ ಚೈವ ತತೋ ಜಯಮುದೀರಯೇತ್. ಮಹಾಭಾರತಕ್ಕೆ 'ಜಯ' ಎಂದು ಹೆಸರು. ಕಟಪಯಾದಿ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಯ ಎಂದರೆ 1, ಜ ಎಂದರೆ 8 (ಕಟಪಯಾದಿಕ್ರಮದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ನೋಡಿ ಪುಟ 48). ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ 'ಜಯ' ಎಂಬುದನ್ನು ಸಂಖ್ಯಾ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ ಹದಿನೆಂಟು ಎಂದಾಗುವುದು. ಮಹಾಭಾರತದಲ್ಲಿ ಹದಿನೆಂಟು ಪರ್ವಗಳಿರುವುದರಿಂದಲೂ ಧರ್ಮಕ್ಕೇ ಜಯ ಎಂಬ ದಿವ್ಯ ಘೋಷಣೆಯನ್ನು ಅದು ಸಾರುವುದರಿಂದಲೂ ಆ ಹೆಸರು ಮಹಾಭಾರತಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ ಎನ್ನಬಹುದು. ಈ ರೀತಿ ಎರಡು ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಪದಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಲು ಸಹಾಯಕವಾಗುವಂತೆ ಇರುವುದು ಕಟಪಯಾದಿಕ್ರಮದ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯ.

ಸಂಗೀತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲೂ ಕಟಪಯಾದಿಕ್ರಮದ ಉಪಯೋಗ ಆಗಿದೆ. ಕಾದಿನವ, ಟಾದಿನವ, ಪಾದಿಪಂಚ, ಯಾದಿನವ ಎಂದು ಕಟಪಯಾದಿ ಕ್ರಮದ ಪ್ರಕಾರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಪದಕ್ರಮವನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿ ಸಂಗೀತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ಈ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಇಪ್ಪತ್ತೆರಡು ಮೇಳಕರ್ತ ರಾಗಗಳುಂಟು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಗದ ಹೆಸರೂ ಸ್ವಾರಸ್ಯವಾಗಿದೆ. ಆಯಾ ರಾಗದ ಮೊದಲನೆಯ ಎರಡು ಅಕ್ಷರಗಳು ಆ ರಾಗದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತೆ ಅವುಗಳಿಗೆ ಹೆಸರಿಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಹನುಮತೋಡಿರಾಗದ ಮೊದಲನೆಯ ಎರಡು ಅಕ್ಷರಗಳಾದ 'ಹನ' ಇವುಗಳು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಟಪಯಾದಿಕ್ರಮದ ಪ್ರಕಾರ 8 ಅಂದರೆ ಆ ರಾಗ ಎಂಟನೆಯ ಮೇಳಕರ್ತ ರಾಗ. ಹೀಗೆಯೇ 'ಖರಹರಪ್ರಿಯ' ಮತ್ತು 'ಧೀರಶಂಕರಾಭರಣ' ಇವು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಇಪ್ಪತ್ತೆರಡು ಮತ್ತು ಇಪ್ಪತ್ತೊಂಬತ್ತನೆಯ ಮೇಳಕರ್ತ ರಾಗಗಳು.

ಇತರ ಪದ್ಧತಿಗಳು

ದಾಶಮಿಕ ಪದ್ಧತಿ ಹೇಗೆ ರೂಪಿತವಾಯಿತು ಎಂಬುದನ್ನು ವಿವರಿಸಿದ್ದಾಯಿತು. ಈ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಇಂಗ್ಲಿಷಿನಲ್ಲಿ ಡೆಸಿಮಲ್ ಪದ್ಧತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ದಾಶಮಿಕ ಎಂದರೆ ಹತ್ತರ ಘಾತಗಳು ಎಂದರ್ಥ. ಹೀಗೆ ನಾವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹತ್ತು ಹತ್ತಾಗಿಯೇ ಎಣಿಕೆ ಮಾಡಲು ನಮ್ಮ ಕೈಗಳಲ್ಲಿ ಹತ್ತು ಬೆರಳುಗಳಿರುವುದೇ ಕಾರಣ ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲೇ ಹೇಳಲಾಗಿದೆ. ಕೆಲವು ಜನಾಂಗದವರು ಕೈಗಳ ಜೊತೆಗೆ ಕಾಲುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಹತ್ತು ಬೆರಳುಗಳನ್ನೂ ಎಣಿಕೆಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದುದರಿಂದ ಅವರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಇಪ್ಪತ್ತರ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಎಣಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಮಾಯ ಜನಾಂಗದವರ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿದ್ದ ಈ ರೀತಿಯ ಎಣಿಕೆಯನ್ನು ಆಗಲೇ ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಹೀಗೆಯೇ ಫ್ರೆಂಚ್ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಎಂಬತ್ತನ್ನು (Quatre-kingt) ಎಂದರೆ ನಾಲ್ಕು ಇಪ್ಪತ್ತು ಎಂದು ಈಗಲೂ ಹೇಳುತ್ತಾರೆ. ಇಂಗ್ಲೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪೌಂಡಿಗೆ ಇಪ್ಪತ್ತು ಷಿಲ್ಲಿಂಗುಗಳು ಇರುವುದನ್ನು ಈಗಲೂ ನಾವು ನೆನಪಿಗೆ ತಂದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಮನುಷ್ಯ ಅನಾಗರಿಕನಾಗಿದ್ದಾಗ ಕೇವಲ ಎರಡರ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರೂಪಿತವಾದ ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದನಂತೆ. ಒಂದು, ಎರಡರ ಅನಂತರ ಮೂರನ್ನು 2+1 ಎಂಬಂತೆಯೂ, ನಾಲ್ಕನ್ನು ಎರಡರ ಎರಡು ಜೋಡಿಯಂತೆಯೂ ಐದನ್ನು(2+2+1) ಎಂಬಂತೆಯೂ ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಕರೆಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಜೋಡಿ ಮಾಡುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಈಗ ಬೆರಣಿ ಮಾರುವವರು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದನ್ನು ನಾವು ನೋಡಬಹುದು. ಕೆಲವುಸಾರಿ ನಾಲ್ಕು ನಾಲ್ಕಾಗಿಯೂ ಎಣಿಸುವುದುಂಟು. ಹತ್ತರ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ರೂಪಿತವಾದ ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಮವನ್ನು ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಬೇಕು ಎಂಬುದು ಪ್ರಕೃತಿನಿಯಮವೂ ಅಲ್ಲ ದೈವ ನಿಯಮವೂ ಅಲ್ಲ. ಅನೇಕ ಶತಮಾನಗಳಿಂದ ಈ ಒಂದು ಪದ್ಧತಿಯೇ ಉಪಯೋಗದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದಲೂ ಅಲ್ಲದೆ ಅದು ಸುಲಭ ಮತ್ತು

ಉಪಯೋಗಕ್ಕೆ ತಕ್ಕುದಾದ್ದರಿಂದಲೂ ಅದನ್ನು ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ.

ಈಜಿಪ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಅರುವತ್ತನ್ನೇ ಆಧಾರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾಕ್ರಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿಯೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಅವನ್ನು ಕೂಡುವ, ಕಳೆಯುವ, ಗುಣಿಸುವ ಮತ್ತು ಭಾಗಿಸುವ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಿಕೊಂಡು ಇದ್ದರು. ದಶವರ್ಗಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ ಈಜಿಪ್ಟಿಗೆ ಬರುವ ಮೊದಲು ಕ್ರಿ. ಶ. 1100ರಲ್ಲಿ ಈಜಿಪ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಈ ಪದ್ಧತಿ ಜಾರಿಯಲ್ಲಿತ್ತು. ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸ್ಥಾನಭೇದದಿಂದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡುವ ಪದ್ಧತಿ ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲೂ ಕಂಡುಬರುವುದು. 1 ಎಂದು ಬರೆದಾಗ, ಈ ಗುರುತು 1 ಎಂಬುದನ್ನಾಗಲೀ 60ಯನ್ನಾಗಲೀ, 60^2 ಅಥವಾ 3600 ಎಂಬುದನ್ನಾಗಲೀ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.

ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ $2442 = 2 \times 60^2 + 4 \times 60 + 42$

$$= 2 \times 3{,}600 + 240 + 42$$

$$= 7{,}200 + 240 + 42$$

$$= 7{,}482$$

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದಂತೆ, ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ 7,482 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 2,442 ಎಂಬ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಈಗಲೂ ನಾವು ಒಂದು ಗಂಟೆಗೆ ಅರುವತ್ತು ಮಿನಿಟ್ ಮತ್ತು ಒಂದು ಮಿನಿಟಿಗೆ ಅರುವತ್ತು ಸೆಕೆಂಡುಗಳು ಎಂದು ಗಂಟೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹಡಗಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣಮಾಡುವ ಒಬ್ಬ ನಾವಿಕನ ಗಡಿಯಾರದಲ್ಲಿ, ಬೆಳಗ್ಗೆ 4 ಗಂಟೆ 17 ಮಿನಿಟ್ 08 ಸೆಕೆಂಡುಗಳು ಎಂದಿದ್ದರೆ, ಕಾಲವನ್ನು 4,17,08 ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹಿಂದಿನ ಮಧ್ಯರಾತ್ರಿಯ ಅನಂತರ

$$4 \times 3600 + 17 \times 60 + 8$$

$= 15428$ ಸೆಕೆಂಡುಗಳು ಕಳೆದಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಡಿಯಾರ ಸೂಚಿಸುವುದು.

ಹೀಗೆಯೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಾಗ ಅರುವತ್ತರ ಘಾತಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಲು ಅನೇಕವೇಳೆ ಮರೆಯುತ್ತಿದ್ದರು. ಇದರಿಂದ ಕೆಲವು ಸಾರಿ ಆ ಗುರುತುಗಳು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಿಷಯವಾಗಿ ಸಂದೇಹ ವುಂಟಾಗುತ್ತಿತ್ತು. 25 ಎಂದರೆ $2 \cdot 60^2 + 5$ ಅಥವಾ $2 \times 60 + 5$ ಆಗಬಹುದು $(2 \times 60^2 + 5)$ $2 \cdot 60^2 + 5 = 7205$ ಎನ್ನುವ ಅರ್ಥ ದಲ್ಲೂ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಇದನ್ನು $2 \times 60 + 5$ ಎಂದು ತಿಳಿದರೆ ಇದು 125 ಆಗುತ್ತವೆ. ಈ ಸಂದಿಗ್ಧವಾದ ಒಂದು ಕಷ್ಟವನ್ನು ತಪ್ಪಿಸಲು ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಹಾಕುವ ಕ್ರಮ ಜಾರಿಗೆ ಬಂದಿತು. ಅಂದರೆ

$$2048 = 2 \times 60^2 \times 0 \cdot 60 + 48$$ ಎಂದು ಅರ್ಥ.

$$= 7200 + 48 = 7248$$

ಗ್ರೀಕ್ ದೇಶದ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನಾದ ಟಾಲೆಮಿ ಎಂಬುವನು ತನ್ನ ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಿಗೆ ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಕ್ರಿ.ಪೂ. 300 ರಲ್ಲಿ ಪರ್ಷಿಯನ್ನರು ಈಜಿಪ್ಟನ್ನು ಆಳುತ್ತಿದ್ದಾಗ ಗಣಿತಜಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅರುವತ್ತರ ಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ಇಪ್ಪತ್ತಾರು ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದರಂತೆ [$60 \times 60 \times$ ....ಇಪ್ಪತ್ತಾರು ಸಾರಿ $= 60^{26}$. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ದಾಶಮಿಕ ಕ್ರಮದ ಪ್ರಕಾರ ಎಣಿಸುತ್ತ ಹೋದರೆ, ಏಕ, ದಶ, ಶತ, ... ಎಂಬಂತೆ ಇಪ್ಪತ್ತೊಂಬತ್ತು ಸ್ಥಾನಗಳು ಇರುತ್ತವೆ]. ಎಂದರೆ ದಶಮಾಂಶ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಇಪ್ಪತ್ತೊಂಬತ್ತು ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಗುಣಾಕಾರ, ಭಾಗಾಹಾರ ಮುಂತಾದುವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದರು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ಈಜಿಪ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಸುಮೇರಿಯನ್ ಜನರು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದರು (ಕ್ರಿ. ಪೂ. ೩000). ಅವರು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದ ಕೆಲವು ಅಂಕಗಳು ಹೀಗಿದ್ದುವು.

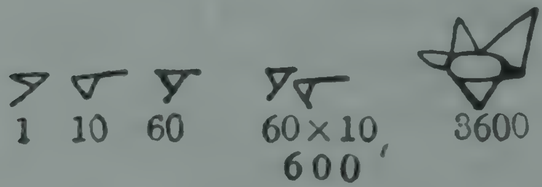


1 10 60 600 3600

(60 × 10)

ಇಲ್ಲಿ ಒಂದಕ್ಕೂ ಅರುವತ್ತಕ್ಕೂ ಒಂದೇ ಗುರುತಿರುವುದು ಒಂದು ವಿಶೇಷ. ಒಂದನ್ನು ಸಣ್ಣ ಗುರುತಿನಿಂದಲೂ ಅರುವತ್ತನ್ನು ದೊಡ್ಡ ಗುರುತಿನಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸಿದೆ.

ಅನಂತರ ಒಂದು ಬ್ಯಾಬಿಲೋನಿಯನ್ ಜನರು ಇದೇ ಕ್ರಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದರು. ಅವರು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದ ಅಂಕಗಳು ಹೀಗಿದ್ದುವು.



ಇಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದು ಮತ್ತು ಅರುವತ್ತನ್ನು ಒಂದೇ ಗುರುತಿನ ಸಣ್ಣ ಮತ್ತು ದೊಡ್ಡ ರೂಪಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ನಾವು ಒಂದೇ ಗುರುತಿಗೆ ಸ್ಥಾನಭೇದದಿಂದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅರ್ಥ ಕೊಡುವೆವಲ್ಲ. ಇದೇ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿಯೂ ಅಡಗಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು.

ಈ ಜನರ ತೂಕ ಮತ್ತು ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ ಅರುವತ್ತನ್ನೇ ಮೂಲಮಾನವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದರಿಂದ ಇವರು ಅರುವತ್ತರ ಘಾತಗಳನ್ನೇ ಆಧಾರವಾಗಿ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ರೂಪಿಸಿದರು.

ಹತ್ತನ್ನು ನಾವು ಒಂದು, ಎರಡು, ಐದು ಮತ್ತು ಹತ್ತು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಮಾತ್ರ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಹನ್ನೆರಡನ್ನು 1, 2, 3, 4, 6, 12 ಎಂಬ ಇಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದಲೂ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಬಹುದು. ಇದೇ ಕಾರಣದಿಂದಲೇ ಪ್ರಾಯಃ ನಾವು ಒಂದು ಡಜನ್ ಹಣ್ಣುಗಳೆಂದರೆ ಹನ್ನೆರಡು ಹಣ್ಣುಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಬೇರೆ ಎಲ್ಲ ವ್ಯವಹಾರಗಳಿಗೂ ನಮಗೆ ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ ಬೇಕು. ಆದರೆ ಒಂದು ಡಜನ್ ಎಂಬ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ ಆ ಪದ್ಧತಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿಲ್ಲ.

ಏಕೆಂದರೆ ಡಜನ್ನಿಗೆ ಹತ್ತೇ ಹಣ್ಣುಗಳು ಎಂದರೆ, ಆಗ ಕಾಲು ಡಜ಼ನ್ ಅಥವಾ ಮೂರನೆಯ ಒಂದು ಡಜ಼ನ್ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ನೆಪೋಲಿಯನ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಹಳ ವಿಶೇಷವಾದ ಆಸಕ್ತಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದನಂತೆ. ಆತನ ಆಪ್ತರಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಬಹಳ ಮಂದಿ ಇದ್ದರು. ಅವರಲ್ಲಿ ಲ್ಯಾಪ್ಲಾಸ್ (Laplace) ಎಂಬ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನೂ ಒಬ್ಬ. ನೆಪೋಲಿಯನ್ ಈತನ ಜತೆ ಚರ್ಚಿಸುತ್ತ ದಾಶಮಿಕ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸುವುದ ಕ್ಕಿಂತ ಹನ್ನೆರಡರ ಘಾತದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು ಇನ್ನೂ ಉತ್ತಮ, ಆದರೆ ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲಿ ಬಲವಾಗಿ ಬೇರೂರಿರುವುದರಿಂದ ಈಗ ಏನನ್ನೂ ಮಾಡಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದನಂತೆ.

ಹತ್ತರ ಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ದಾಶಮಿಕ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ರೂಪಿಸಿದಾಗ, ನಮಗೆ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ಎಂಬ ಹತ್ತು ಗುರುತು ಗಳಿದ್ದರೆ ಸಾಕು. ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಈ ಹತ್ತು ಗುರುತುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದಲೇ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ಹನ್ನೆಡರ ಘಾತದ ಕ್ರಮವನ್ನು ರೂಪಿಸಿದಾಗ ಹನ್ನೆರಡು ಗುರುತುಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ಮೇಲೆ ಹೇಳುವ ಗುರುತುಗಳೊಂದಿಗೆ ಮತ್ತೆರಡು ಗುರುತುಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಈಗ ಹತ್ತಕ್ಕೆ ε ಎನ್ನೋಣ. ಹನ್ನೊಂದಕ್ಕೆ x ಎಂಬ ಗುರುತು ಇರಲಿ ಈಗ.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ε, x

ಎಂಬಂತೆ ಇರುವ ಈ ಹನ್ನೆರಡು ಗುರುತುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ದ್ವಾದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಹೇಗೆ ರೂಪಿಸುವುದು? ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ ದಾಶಮಿಕ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಒಂದರಿಂದ ಒಂಬತ್ತರ ವರೆಗಿನ ಅಂಕಗಳು ಬರುತ್ತವೆ. ಎರಡನೆಯ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹತ್ತರಿಂದ ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮೂರನೆಯ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಅಂಕಗಳನ್ನು ನೂರ (10^2) ರಿಂದ ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ 245 ಎಂಬ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ($2\times10^2+4\times10+5$) ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಹಾಗೆಯೇ ಈ ಹನ್ನೆರಡರ ಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ದ್ವಾದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿ ಎಂದು ಹೊಸ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ. ಇಲ್ಲಿ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಒಂದರಿಂದ ಹನ್ನೊಂದರ ವರೆಗಿನ ಅಂಕಗಳು ಬರುತ್ತವೆ. ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ ಹೋಗುತ್ತ, ಎರಡನೆಯ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಹನ್ನೆರಡರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು. ಮೂರನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಅಂಕಗಳನ್ನು $12^2=12\times12=144$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು. ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ

$$245=2\times12^2+4\times12+5$$
$$=2\times144+4\times12+5$$
$$=288+48+5$$
$=341$ ಆಗುವುದು.

ಹೀಗೆಯೇ 1238 ಎಂಬುದು

$$1^1\times12^3+2\times12^2+3\times12+8$$
$=2060$ (ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ)

ಹೀಗೆಯೆ 8784 ಎಂಬುದು

$$8\times12^3+7\times12^2+8\times12+1$$
$$=140832$$

140832 ಎಂಬ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೇವಲ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ 8784 ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು ಎಂದರೆ ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅದಕ್ಕಿಂತ ಸ್ವಲ್ಪ ಚಿಕ್ಕದಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಈಗ $8\varepsilon=8\times12+10=106$ ಎಂದರ್ಥ.

$3x=3\times12+11=47$ ಎಂದರ್ಥ.

ಈ ದ್ವಾದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಚೆನ್ನಾಗಿ ರೂಪಿಸಿ ಅದಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾದ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನೂ ಗುಣಾಕಾರ ಭಾಗಾಹಾರ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸುವ ಪುಸ್ತಕಗಳು ಆಂಗ್ಲ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿವೆ.

ಒಂದು ಭಾಷೆಯನ್ನು ಚೆನ್ನಾಗಿ ಅಭ್ಯಾಸಮಾಡಿದ ಅನಂತರ ಮತ್ತೊಂದು ಭಾಷೆಯನ್ನು ಕಲಿಯುವುದು ಹೇಗೆ ಸುಲಭವೋ ಹಾಗೆಯೇ ಒಂದು ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಕ್ರಮವು ತಿಳಿದ ಮೇಲೆ, ಹತ್ತರ ಬದಲು ಬೇರೆ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೇ ಆಗಲಿ ಆಧಾರವಾಗಿ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು ಕಷ್ಟವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಈಗ ನಾಲ್ಕನ್ನೇ ಆಧಾರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ನಾಲ್ಕರ ಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಒಂದು ಚತುರ್ಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಹೇಗೆ ರೂಪಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ದಾಶಮಿಕ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ 0 ಯಿಂದ ಒಂಬತ್ತರವರೆಗೆ ಇರುವ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಸಂಕೇತಗಳು ಏಕಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅವುಗಳ ನಿಜವಾದ ಬೆಲೆ ಇರುತ್ತದೆ. ದಶಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲ್ಪಟ್ಟಾಗ, ಆ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಅದರ ಹತ್ತು ಪಟ್ಟು ಬೆಲೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಶತಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೂರರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಸೂಚಿಸಬೇಕು. ಹೀಗೆಯೇ ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ ಸ್ಥಾನ ಹೆಚ್ಚುತ್ತ ಹೋದಂತೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸ್ಥಾನಕ್ಕೂ ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಸ್ಥಾನದ ಹತ್ತರಷ್ಟು ಬೆಲೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಇದು ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ ಕ್ರಮದ ಆಧಾರತತ್ತ್ವಗಳು.

ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಪ್ತಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಈಗ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. $(937)_{10}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವ 9, 3, 7 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು 10^2 (ಅಥವಾ ನೂರು), ಎಷ್ಟು 10, ಎಷ್ಟು 1, ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತವೆ. ಇದನ್ನು ಸಪ್ತಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವಾಗ ಇದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು 7^2, ಎಷ್ಟು 7, ಎಷ್ಟು 1 ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅಂಕಗಳು ತಿಳಿಸಬೇಕು. ಇದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು

ಒಂದು ಸುಲಭವಾದ ಕ್ರಮವಿದೆ. $(937)_{10}$ ಅನ್ನು 7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುತ್ತ ಹೋಗಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಂತದಲ್ಲೂ ಶೇಷವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

$$\begin{array}{l} 7\angle 937 \\ 7\angle 133-6 \\ 7\angle \ \ 19-0 \\ \qquad 2-5 \end{array}$$

ಈಗ $(937)_{10}=(2506)_7=2\cdot7^3+5\cdot7^2+0\cdot7+6$
$$=2\cdot343+5\cdot49+0+6$$
$$=686+245+6=937$$

ಸಪ್ತಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ 937ಅನ್ನು ಬರೆವಾಗ ಅದು 2506 ಆಗುವುದು. ಎಂದರೆ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ 9 ನೂರು, 3 ಹತ್ತು, 7 ಒಂದು ಇರುವಂತೆ, 2 ಮುನ್ನೂರ ನಲವತ್ತಮೂರು (7^3), 5 ನಲವತ್ತೊಂಬತ್ತು (7^2), 0 ಏಳು (7^1) ಮತ್ತು 6 ಒಂದುಗಳು ಇವೆ, ಎಂದರ್ಥ.

ಮೇಲೆ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಿದ 909 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಪ್ತಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ,

$$\begin{array}{l} 7\angle 909 \\ 7\angle 129-6 \\ 7\angle \ \ 18-3 \\ \qquad 2-4 \end{array}$$

$(2436)_7$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಸಪ್ತಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬೇಕಾದ ಅಂಕಗಳು ಆರು: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ; ದಾಶಮಿಕ ಪದ್ಧತಿಯಂತೆ ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಈ ಆರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅವುಗಳಿಗಿರುವ ಬೆಲೆಗಳೇ ಇರುತ್ತವೆ. ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ ಬರೆದಾಗ ಎರಡನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದಾಗ, ಅವುಗಳನ್ನು ಏಳರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಮೂರನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಈ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಏಳರವರ್ಗದಿಂದಲೂ, ಅಥವಾ

7^2 (=49 ನಿಂದಲೂ), ನಾಲ್ಕನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ 7^3 ನಿಂದಲೂ ಗುಣಿಸಬೇಕಾಗುವುದು.

ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $(2436)_{10}$ ಎಂದೂ, ಅದನ್ನೇ ಸಪ್ತಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ $(2436)_7$ ಎಂದೂ ಬರೆಯೋಣ.

$$(2436)_{10}=2\cdot10^3+4\cdot10^2+3\cdot10+6$$ ಎಂದು ಅರ್ಥ.

ಹೀಗೆಯೇ

$$(2436)_7=2\cdot7^3+4\cdot7^2+3\cdot7+6$$
$$=2\cdot343+4\cdot49+21+6$$
$$=686+196+21+6=909$$

ಎಂದರೆ ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದ 909 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಪ್ತಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ 2436 ಎಂದಾಗುವುದು.

$$(2436)_7=(909)_{10}$$

$(2436)_7$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ 6 ಆರನ್ನೇ ಸೂಚಿಸುವುದು: ಬಲದಿಂದ ಎರಡನೇ ಜಾಗದಲ್ಲಿರುವ 3, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು 7 ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನೂ ಮೂರನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ 4 ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು 7^2 ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನೂ, ನಾಲ್ಕನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ 2 ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು 7^3 ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುವುದು. ಹೀಗೆಯೇ ನಾಲ್ಕಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಥಾನಗಳಿಸಿರುವ ಅಂಕಗಳಿಗೂ ಅರ್ಥಕೊಡಬೇಕು.

ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಲೀ ಇನ್ನು ಯಾವ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕಾದರೂ ಇದೇ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಮೇಲೆ ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದ 937 ಅನ್ನು [ಇದನ್ನು $(937)_{10}$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುವ ಆವಶ್ಯಕತೆ ಇಲ್ಲ. ಆವರಣವನ್ನು ಹಾಕದಿದ್ದರೆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿಯೇ ಬರೆದಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ.] ಚತುರ್ಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು

4 ರಿಂದ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತ ಹೋಗಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಂತದಲ್ಲಿಯೂ ಶೇಷವನ್ನು ಗುರುತಿಸುತ್ತ ಹೋಗಬೇಕು.

$4\angle 937$	$(937)_{10} = (32221)_4$
$4\angle 234 - 1$	$= 3\cdot4^4 + 2\cdot4^3 + 2\cdot4^2 + 2\cdot4 + 1$
$4\angle\ 58 - 2$	$= 3(256) + 2(64) + 2(16) + 2(4) + 1$
$4\angle\ 14 - 2$	$= 768 + 128 + 32 + 8 + 1$
$3 - 2$	$= 937$

ಚತುರ್ಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬರೆದಾಗ 32221 ಎಂದಾಗುವುದು.

ಹತ್ತರ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ 937 ರಲ್ಲಿ ಮೂರೇ ಅಂಕಗಳಿದ್ದುವು. ಅದನ್ನೇ ನಾಲ್ಕನ್ನು ಆಧಾರಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಚತುರ್ಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಐದು ಅಂಕಗಳು ಅಥವಾ ಸ್ಥಾನಗಳಿರುತ್ತವೆ (32221). ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಡಿಮೆಯಾದಂತೆಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಾಗ ಸ್ಥಾನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತ ಹೋಗುವುದು.

ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಣಿತದ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ ಮುಂತಾದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು, ಕೂಡುವ ಪಟ್ಟಿ ಮತ್ತು ಗುಣಿಸುವ ಪಟ್ಟಿ (ಕೋಷ್ಟಕ ಅಥವಾ ಮಗ್ಗಿ) ಇವುಗಳನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಟ್ಟು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆಯೇ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪದ್ಧತಿಗಳಲ್ಲೂ ಸಂಕಲನ ಮುಂತಾದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಕೂಡುವ ಪಟ್ಟಿ ಮತ್ತು ಗುಣಿಸುವ ಪಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬೇಕು. ಇವುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು.

ಪಂಚಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡೋಣ. ಇಲ್ಲಿ ಆಧಾರಸಂಖ್ಯೆ 5. ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಬೇಕಾದ ಅಂಕಗಳು ಐದೇ: 0, 1, 2, 3, 4.

ಕೂಡುವ ಪಟ್ಟಿ (ಆಧಾರಸಂಖ್ಯೆ 5)

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

ಹತ್ತರ ಆಧಾರದಲ್ಲಿಯೇ ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿ ರೂಢಿ ಇರುವುದರಿಂದ ಈ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ನಿಮಗೆ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ತೊಂದರೆಯಾಗಬಹುದು. ಆದರೆ ಸ್ವಲ್ಪ ಅಭ್ಯಾಸವಾದಮೇಲೆ ಇದನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದರಲ್ಲಿ ಯಾವ ತೊಂದರೆಯೂ ಇರಲಾರದು. $1+4=5$ ಆದರೆ ಇದನ್ನು ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ 10 ಎಂದು ಬರೆದಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ 5ನ್ನು ಪಂಚಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ 10 ಎಂದಾಗುವುದು.

$$(10)_5=1\cdot5+0$$

$2+4=6$ ಇದನ್ನು ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ 11 ಎಂದು ಬರೆದಿದೆ. $(11)_5=1.5+1=6$

66ನ್ನು ಪಂಚಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ 11 ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. $4+4=8$ ಇದನ್ನು 13 ಎಂದು ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಲು ಕಾರಣ $(13)_5=1\cdot5+3=8$

ಈಗ ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ನೀವು ಸುಲಭವಾಗಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಲ್ಲಿರಿ.

6, 8 ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಂಚಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕಾದಾಗ, ಹಿಂದೆ ಹೇಳಿದ ಕ್ರಮವನ್ನೇ ಅನುಸರಿಸಬಹುದು. ಎಂದರೆ 5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುತ್ತ ಹೋಗಿ ಪ್ರತಿ ಹಂತದಲ್ಲಿಯೂ ಶೇಷವನ್ನು ನಮೂದಿಸುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬಹುದು.

5∠6 $(6)_{10}=(11)_5$
1–1

5∠8 $(8)_{10}=(13)_5$ ಇತ್ಯಾದಿ.
1–3

ಗುಣಾಕಾರದ ಪಟ್ಟಿ (ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆ 5)

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

3×3=9 ಆದರೂ ಪಂಚಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ

5∠9 $(9)_{10}=(14)_5$
1–4

ಆದ್ದರಿಂದ 3×3=14 ಎಂದು ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಿದೆ.

ಹೀಗೆಯೇ $4 \times 4 = 16$ ಆದರೂ

$5\angle 16$ $(16)_{10} = (31)_5$ ಆದ್ದರಿಂದ

3 – 1

ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ $4 \times 4 = 31$ ಎಂದು ಬರೆದಿದೆ. ಈಗ ಪಂಚಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವ ಮೇಲಿನ ಗುಣಾಕಾರದ ಪಟ್ಟಿ ನಿಮಗೆ ಅರ್ಥವಾಗುವುದರಲ್ಲಿ ಸಂದೇಹವಿಲ್ಲ.

ಈಗ ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿ. ಅವುಗಳನ್ನೇ ಪಂಚಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಕೂಡಿ ತಾಳೆ ನೋಡೋಣ.

ದಶಮಾನಪದ್ಧತಿ

```
2 4 9
  5 7
-----
3 0 6
-----
```

$$\left.\begin{array}{l}(249)_{10} = (1444)_5 \\ (\ 57)_{10} = (\ 212)_5\end{array}\right\}$$ ಆದ್ದರಿಂದ

[ಕೂಡುವ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ನೋಡಿ (ಪುಟ 69)]

ಪಂಚಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಕೂಡಿದರೆ

```
1 4 4 4
  2 1 2
-------
2 2 1 1
-------
```

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕೂಡುವಂತೆಯೇ ಆರಂಭಮಾಡಿ ಆದರೆ ಈಗ ಪಂಚಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು

ಮರೆಯಬೇಡಿ. $2+4=11$ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 11ಕ್ಕೆ 1 ಅನ್ನು ಬರೆದು, ಉಳಿದ ಒಂದನ್ನು ಎರಡನೇ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

(ಬಲದಿಂದ) ಎರಡನೇ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$$(1+1)+4=2+4=11$$

ಎರಡನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 1 ಅನ್ನು ಬರೆದು ಉಳಿದ 1 ಅನ್ನು ಮೂರನೇ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಮೂರನೇ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ

$$1+2+4=3+4=12$$

2ನ್ನು ಮೂರನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಟ್ಟು, ಉಳಿದ 1 ಅನ್ನು ನಾಲ್ಕನೇ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ವರ್ಗಾಯಿಸಿ.

ನಾಲ್ಕನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿ

$$1+1=2$$

ಆದ್ದರಿಂದ

$$(1444)_5+(212)_5=(2211)_5$$

ತಾಳೆ ನೋಡಿದರೆ

$$\begin{aligned}(2211)_5 &= 2\cdot5^3+2\cdot5^2+1\cdot5+1\\ &= 2\,(125)+2\,(25)+5+1\\ &= 250+50+5+1\\ &= 306\end{aligned}$$

(ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬಂದ ಮೊತ್ತ)

ಹೀಗೆಯೇ ಕೂಡುವ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರದ ಪಟ್ಟಿಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ, ಪಂಚಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರಗಳನ್ನೂ ಮಾಡಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: 19 ಮತ್ತು 14 ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $19\times14=266$.

$5\angle19$ ಮತ್ತು $5\angle14$ ಆದ್ದರಿಂದ
$3-4$ $\quad$ $2-4$

$(19)_{10}=(34)_5$ ಮತ್ತು $(14)_{10}=(24)_5$

ಪಂಚಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 34 ಮತ್ತು 24 ಎಂದಾಗುತ್ತವೆ.

$$\begin{array}{r} 34\times24 \\ \hline 301 \\ 123 \\ \hline 2031 \\ \hline \end{array}$$

ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳು

$4\times4=31$

$4\times3=22$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 3 \\ \hline 30 \end{array} \quad (2+3=10)$$

$2\times4=13$

$2\times3=11$

ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಗುಣಿಸುವಂತೆಯೇ ಗುಣಿಸಿ. ಆದರೆ ಪಂಚಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯ ಗುಣಾಕಾರದ ಪಟ್ಟಿ ಮತ್ತು ಕೂಡುವ ಪಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿ ಹಂತದಲ್ಲೂ ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಮರೆಯಬೇಡಿ. ಹೀಗೆ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡುವಾಗ ನೀವು ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಮೇಲೆ ಬಲಗಡೆ ಬರೆದಿದೆ.

ತಾಳೆ ನೋಡಿದರೆ

$$\begin{aligned}(2031)_5 &= 2\cdot5^3+0\cdot5^2+3\cdot5+1\\ &=2(125)+0+(15)+1\\ &=250+15+1\\ &=266\end{aligned}$$

ದ್ವಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿ: ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆ 2. ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು, ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ಎಂಬ ಹತ್ತು ಗುರುತುಗಳು ಬೇಕು. ಪಂಚಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ 0, 1, 2, 3, 4 ಎಂಬ ಐದು ಸಂಕೇತಗಳು ಬೇಕು. ಹಾಗೆಯೇ ದ್ವಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಗೆ 0, 1 ಎಂಬ ಎರಡೇ ಗುರುತುಗಳು ಸಾಕು.

ದಾಶಮಿಕ ಅಥವಾ ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಾಗ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ (ಅಥವಾ ಬಲಗಡೆ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ) ಇರುವ ಅಂಕ ಅದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಒಂದುಗಳು ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನೂ ತಿಳಿಸುವುದು. ದಶಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಅಥವಾ ಬಲಗಡೆಯಿಂದ ಎರಡನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹತ್ತು ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಮೂರನೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ (ಬಲಗಡೆಯಿಂದ) ಬರುವ ಅಂಕ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ನೂರು ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನೂ (ಇತ್ಯಾದಿ) ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಬರೆದಿರುವ ಚಿತ್ರದ ಮೂಲಕ ವಿಶದಪಡಿಸಬಹುದು.

ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ರಚನೆ

ಎಷ್ಟು ಹತ್ತು ಸಾವಿರ (10^4)	ಎಷ್ಟು ಸಾವಿರ (10^3)	ಎಷ್ಟು ನೂರು (10^2)	ಎಷ್ಟು ಹತ್ತು (10)	ಎಷ್ಟು ಒಂದು	ಸಂಖ್ಯೆ
				4	4
			1	5	15
		3	2	6	326
	4	3	6	7	4367
2	5	4	3	1	25431

ಹೀಗೆಯೇ ದ್ವಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದಾಗ ಅದರಲ್ಲಿ 0 ಮತ್ತು 1 ಇವೆರಡರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಮಾತ್ರ ಯಾವ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಬರಲು ಸಾಧ್ಯ. ಮತ್ತು ಈ ಅಂಕಗಳು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು 1, ಎಷ್ಟು 2, ಎಷ್ಟು 2^2 (=4); ಎಷ್ಟು 2^3 (=8); ಎಷ್ಟು 2^4 (=16); (ಇತ್ಯಾದಿ) ಇರುವುವು ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುವು.

ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದ್ವಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕಾದರೆ, ಹಿಂದೆ ವಿವರಿಸಿದಂತೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 2 ರಿಂದ ಸಂತತವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುತ್ತ ಹೋಗಿ ಪ್ರತಿ ಹಂತದಲ್ಲಿಯೂ ಬಂದ ಶೇಷವನ್ನು ಗುರುತಿಸುತ್ತ ಹೋಗಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: (1) 0·4

$$\begin{array}{l} 2\angle 4 \\ 2\angle 2-0 \\ \quad 1-0 \end{array}$$

$$\therefore (4)_{10}=(100)_2$$

ಎಂದರೆ ನಾಲ್ಕನ್ನು ದ್ವಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ 100 ಎಂದು ಬರೆಯುವೆವು.

$$(100)_2=1\cdot2^2+0\cdot2+0$$

(2) 15 :

$$\begin{array}{l} 2\angle 15 \\ 2\angle 7-1 \\ 2\angle 3-1 \\ \quad 1-1 \end{array} \qquad (15)_{10}=(1111)_2$$

ಹದಿನೈದನ್ನು ದ್ವಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ 1111 ಎಂದಾಗುವುದು.

ಏಕೆಂದರೆ $(1111)_2=1\cdot2^3+1\cdot2^2+1\cdot2+1$

$$=1\cdot(8)+1\cdot(4)+1\cdot(2)+1$$

(3) 37 :

$$\begin{array}{l} 2\angle 37 \\ 2\angle 18-1 \\ 2\angle\ 9-0 \\ 2\angle\ 4-1 \\ 2\angle\ 2-0 \\ \quad\ 1-0 \end{array} \qquad (37)_{10}=(100101)_2$$

ಮೂವತ್ತೇಳನ್ನು ದ್ವಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ (100101) ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಏಕೆಂದರೆ

$$(100101)_2 = 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2 + 1$$
$$= 1(32) + 0(16) + 0(8) + 1(4) + 0(2) + 1$$

(4) 124:

$$\begin{array}{rl} 2 \angle & 124 \\ 2 \angle & 62 - 0 \\ 2 \angle & 31 - 0 \\ 2 \angle & 15 - 1 \\ 2 \angle & 7 - 1 \\ 2 \angle & 3 - 1 \\ & 1 - 1 \end{array} \qquad (124)_{10} = (1111100)_2$$

ನೂರ ಇಪ್ಪತ್ತನಾಲ್ಕನ್ನು ದ್ವಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ 1111100 ಎಂದು ಬರೆಯಬೇಕು.

ಏಕೆಂದರೆ

$$(1111100)_2 = 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2 + 0$$
$$= 1(64) + 1(32) + 1(16) + 1(8) + 1(4) + 0(2) + 0$$

ಹೀಗೆ ದ್ವಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬರೆದಾಗ, ಅದರಲ್ಲಿ ಬಲಗಡೆಯ ಕೊನೆಯಿಂದ ಮೊದಲನೇ, ಎರಡನೇ, ಮೂರನೇ, ನಾಲ್ಕನೇ .... ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಅಂಕಗಳು, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ, ಎಷ್ಟು 1, ಎಷ್ಟು 2, ಎಷ್ಟು 2^2 (ಅಥವಾ 4) ; ಎಷ್ಟು 2^3 (ಅಥವಾ 8) ; ಎಷ್ಟು 2^4 (ಅಥವಾ 16) .... ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುವು.

ಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೇ ಆರಿಸಿಕೊಂಡು, ದ್ವಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ರಚನೆಯನ್ನೂ ಅವುಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಕೇತವನ್ನೂ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.

ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದ ಸಂಖ್ಯೆ	ಇದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು 2^6 ಅಥವಾ 64 ಇದೆ ?	ಇದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು 2^5 ಅಥವಾ 32 ಇದೆ ?	ಇದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು 2^4 ಅಥವಾ 16 ಇದೆ ?	ಇದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು 2^3 ಅಥವಾ 8 ಇದೆ ?	ಇದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು 2^2 ಅಥವಾ 4 ಇದೆ ?	ಇದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು 2 ಇದೆ ?	ಇದರಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು 1 ಇದೆ ?	ದ್ವಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಂಕೇತ
4					1	0	0	100
15				1	1	1	1	1111
37		1	0	0	1	0	1	100101
124	1	1	1	1	1	0	0	1111100

ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ನೂರಇಪ್ಪತ್ತನಾಲ್ಕರಂಥ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಏಳು ಸ್ಥಾನಗಳುಳ್ಳ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಈ ಕ್ರಮದ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯವೇನೆಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಗುರುತುಗಳು ಎರಡೇ: 0 ಮತ್ತು 1. ಮನುಷ್ಯನ ಬುದ್ಧಿ ಇನ್ನೂ ಬೆಳೆಯದೆ ಇದ್ದ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಅಂದರೆ ಆತ ನಾಗರಿಕತೆಯ ಮೆಟ್ಟಲನ್ನು ಹತ್ತತೊಡಗಿದಾಗ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದ ಪದ್ಧತಿ ಇದಾದರೂ ನಾಗರಿಕತೆಯ ಉಚ್ಚ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಈಗಲೂ ಮನುಷ್ಯ ಈ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಗಣಕ ಯಂತ್ರಗಳ ರಚನೆಗಾಗಿ ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾನೆ.

ಅನೇಕ ಶತಮಾನಗಳ ಸಾಹಸದ ಅನಂತರ ಮನುಷ್ಯ, ಎಲ್ಲ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಿಗೂ ಅನುಕೂಲವಾದ ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದ. ಆದರೂ ಅನೇಕ ದೊಡ್ಡ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ತೀರ ಬೇಸರಿಕೆಯ ಕೆಲಸವಾದ ಕಾರಣ, ಮಾನವ ಯಂತ್ರಾವಲಂಬಿಯಾಗುವ ಚಾಪಲ್ಯವನ್ನು ತೋರಿಸಿದ. ಯಂತ್ರಯುಗದಲ್ಲಿ ಇಂಥ ನಡವಳಿಕೆ ಸಹಜವೇ ಹೌದು. ತೀರ ಹಿಂದಿನಿಂದ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದ ಮಣಿಕಟ್ಟೂ ಒಂದು ಗಣಕಯಂತ್ರವೇ. ಅಂದರೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಯಂತ್ರಗಳನ್ನು ಮಾನವ ಯಂತ್ರಯುಗಕ್ಕೆ ಮೊದಲೇ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದ ಎಂದಾಯಿತು. 2000 ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಗ್ರೀಕರು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದ ಗಣಕಯಂತ್ರವೊಂದು 1900 ರಲ್ಲಿ ಗ್ರೀಸ್‌ನ ಬೆಸ್ತರಿಗೆ ಸಿಕ್ಕಿತಂತೆ. ಹದಿನೇಳನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ Jhon Napner ಎಂಬುವನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಗಣಕಯಂತ್ರವೊಂದು ಅವನಕಾಲದಲ್ಲಿ ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿದ್ದಿತು ಎಂದು ತಿಳಿದು ಬಂದಿದೆ. ಆಧುನಿಕ ಗಣಕ ಯಂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ರಂಧ್ರಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರುವ ಕಾರ್ಡುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಾರೆ. ಈ ಕಾರ್ಡುಗಳ ಮೇಲೆ ದ್ವಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೊಸ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುತ್ತದೆ. ದ್ವಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ 1 ಮತ್ತು 0 ಎಂಬ ಎರಡೇ ಗುರುತುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಕಾರ್ಡುಗಳ ಮೇಲೆ 1 ರ ಬದಲು ರಂಧ್ರವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಾರೆ. ರಂಧ್ರವಿಲ್ಲದೆ ಇರುವ ಜಾಗ 0 ಗುರುತಿಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟದ್ದು. ಯಂತ್ರದಲ್ಲಿರುವ

ವಿದ್ಯುಚ್ಛಕ್ತಿ ಕಾರ್ಡುಗಳ ರಂಧ್ರಗಳ ಮೂಲಕ ಮಾತ್ರ ಪ್ರವಹಿಸ ಬಲ್ಲದು. ರಂಧ್ರವಿಲ್ಲದೆ ಇರುವ ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಪ್ರವಹಿಸಲಾರದು. ಈ ವಿದ್ಯುಚ್ಛಕ್ತಿಯು ಹರಿಯುವಿಕೆ ಅಥವಾ ಹರಿಯದೇ ಇರುವಿಕೆ ಗಣಕ ಯಂತ್ರದ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಣೆಗೆ ಮೂಲಾಧಾರ. ರಂಧ್ರಗಳಿಂದ ಕೂಡಿ ರುವ ಕಾರ್ಡಿನಲ್ಲಿ ಯಂತ್ರಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ಅಂಕಿ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸಿದಾಗ, ರಂಧ್ರದ ಮೂಲಕ ವಿದ್ಯುಚ್ಛಕ್ತಿ ಪ್ರವಹಿಸಿದಾಗ ಯಂತ್ರ 1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ರಂಧ್ರವಿಲ್ಲದ ಜಾಗದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯುತ್ಪ್ರವಾಹ ತಡೆಯು ಲ್ಪಟ್ಟಾಗ 0 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಬರೆಯುವುದು. ವಿದ್ಯುತ್ಪ್ರವಾಹ ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ ಒಂದು ಲಕ್ಷದ ಎಂಭತ್ತಾರು ಸಾವಿರ ಮೈಲಿ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಹರಿಯುವುದರಿಂದ, ಗಣಕಯಂತ್ರಗಳು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯುದ್ವೇಗ ದಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತವೆ. ಕೆಲವು ಗಣಕಯಂತ್ರಗಳು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ ಐದು ಸಾವಿರ ಸಂಕಲನಗಳನ್ನು ಮಾಡುತ್ತವೆ.

ಕೊನೆಯ ಮಾತು

ದಾಶಮಿಕ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವಾಗ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಒಂದು, ಎಷ್ಟು ಹತ್ತು, ಎಷ್ಟು ನೂರು, ಎಷ್ಟು ಸಾವಿರ (ಇತ್ಯಾದಿ) ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂಕಗಳ ಮೂಲಕ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಎರಡು ಸಾವಿರದ ಮುನ್ನೂರ ಐವತ್ತೆಂಟು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಸಾವಿರಗಳು ಎರಡು (2), ನೂರುಗಳು ಮೂರು (3), ಹತ್ತುಗಳು ಐದು (5), ಒಂದುಗಳು ಎಂಟು (8) ಇರುವುದರಿಂದ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 2358 ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದಕ್ಕೂ ಇದೇ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬಹುದು ಎಂದು ಸ್ಟೆವಿನಸ್ (Stevinus) ಎಂಬುವನು ಆಲೋಚಿಸಿ, ದಶಮಾಂಶ ಕ್ರಮವನ್ನು ರೂಪಿಸಿದನು ಈಜಿಪ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಅರವತ್ತರ ಮತ್ತು ಅರವತ್ತರ ಘಾತಗಳ ಅಂಶಗಳನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\frac{1}{2}$ ಎಂಬ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು $\frac{30}{60}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದಾದುದರಿಂದ, $\frac{1}{2}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 30 ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತಿದ್ದರು (ಅರವತ್ತು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಮೂವತ್ತು ಭಾಗಗಳು). ಹೀಗೆಯೇ $\frac{1}{4}=\frac{15}{60}$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 15 ಎಂದೇ ಸೂಚಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ದಶಮಾಂಶ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಒಂದು ದತ್ತ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹತ್ತನೆಯ ಒಂದು ಭಾಗಗಳಿವೆ, ಎಷ್ಟು ನೂರನೆಯ ಒಂದು ಭಾಗಗಳಿವೆ, ಎಷ್ಟು ಸಾವಿರದ ಒಂದನೆಯ ಭಾಗಗಳಿವೆ (ಇತ್ಯಾದಿ) ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರ ಮೂಲಕ ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\frac{3}{4}$ ಎಂಬ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ

$$\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\times\frac{100}{100}=\frac{3\times 25}{100}=\frac{75}{100}=\frac{70+5}{100}=\frac{70}{100}+\frac{5}{100}$$

$=\frac{7}{10}+\frac{5}{100}=7\left(\frac{1}{10}\right)+5\left(\frac{1}{100}\right)=\cdot75$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತ

ದಿಂದ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸಂಕೇತದ ಮುಂದೆ ಹಾಕಿರುವ ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಮುಂದೆ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸುವುದು. ಬಿಂದುವಿನ ಅನಂತರ ಬಲಗಡೆಗೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು $\frac{1}{10}$ ಭಾಗಗಳಿವೆ, ಎಷ್ಟು $\frac{1}{100}$ ಭಾಗಗಳಿವೆ, ಎಷ್ಟು $\frac{1}{1000}$ ಭಾಗಗಳಿವೆ (ಇತ್ಯಾದಿ) ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತವೆ. $\cdot 75$ ಎಂಬ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಏಳು $\frac{1}{10}$ ಭಾಗಗಳೂ ಐದು $\frac{1}{100}$ ಭಾಗಗಳೂ ಇವೆ ಎಂದು ಸಂಕೇತ ಸೂಚಿಸುವುದು. ಹೀಗೆಯೇ $\cdot 3478$ ಎಂಬ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಮೂರು $\frac{1}{10}$ ಭಾಗಗಳೂ ನಾಲ್ಕು $\frac{1}{100}$ ಭಾಗಗಳೂ ಏಳು $\frac{1}{1000}$ ಭಾಗಗಳೂ ಎಂಟು $\frac{1}{10000}$ ಭಾಗಗಳೂ ಇವೆ ಎಂದು ಅಭಿಪ್ರಾಯ.

$$\cdot 3478 = \frac{3478}{10000} = \frac{3000+400+70+8}{10000}$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{8}{10000}$$

$$= 3\left(\frac{1}{10}\right) + 4\left(\frac{1}{100}\right) + 7\left(\frac{1}{1000}\right) + 8\left(\frac{1}{10000}\right)$$

405 ಎಂಬುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಸೊನ್ನೆ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಸೊನ್ನೆ ಹತ್ತುಗಳು ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹೇಗೆ ಸೂಚಿಸುವುದೋ ಹಾಗೆಯೇ $\cdot 405 = 4\left(\frac{1}{10}\right) + 0\left(\frac{1}{100}\right) + 5\left(\frac{1}{1000}\right)$ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು $\frac{1}{10}$ ಭಾಗಗಳೂ ಸೊನ್ನೆ $\frac{1}{100}$ ಭಾಗಗಳೂ ಐದು $\frac{1}{1000}$ ಭಾಗಗಳೂ ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು $\cdot 405$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತ ಸೂಚಿಸುವುದು. ದಾಶಮಿಕ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳನ್ನೇ ಇಲ್ಲಿಯೂ ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಲೀ 0 ಎಂಬ ಘಾತಕ್ಕೆ ಏರಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಬೆಲೆ ಒಂದು ಎಂದು ಪರಿಭಾಷೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $2^0=1$, $3^0=1$, $10^0=1$, $234^0=1$ ಹೀಗೆಯೇ $\frac{1}{10}$ ಈ ಭಿನ್ನ ರಾಶಿಯನ್ನು 10^{-1} ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದಲೂ, $\frac{1}{100}\left(=\frac{1}{10^2}\right)$ ಈ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು 10^{-2} ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದಲೂ, $\frac{1}{1000}\left(=\frac{1}{10^3}\right)$ ಈ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು 10^{-3} ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

2345·3578 ಈ ಸಂಕೇತದ ನಿಜವಾದ ಅರ್ಥ

$$=2\cdot1000+3\cdot100+4\cdot10+5\cdot1+\frac{3}{10}+\frac{5}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{8}{10000}$$

$$=2\cdot10^3+3\cdot10^2+4\cdot10^1+5\cdot10^0+3\cdot10^{-1}+5\cdot10^{-2}+7\cdot10^{-3}+8\cdot10^{-4}$$

ಎಂದರೆ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ	10^3ಗಳ	ಸಂಖ್ಯೆ	2
	10^2	,,	3
	10^1	,,	4
	10^0	,,	5
	10^{-1}	,,	3
	10^{-2}	,,	5
	10^{-3}	,,	7
ಮತ್ತು	10^{-4}	,,	8

ಆದ್ದರಿಂದಲೇ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 2345·3578 ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದುವಿನ ಎಡಕ್ಕಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 10ರ ಧನ ಘಾತಗಳು (ಸೊನ್ನೆ ಘಾತವನ್ನು ಸೇರಿ) ಎಷ್ಟೆಷ್ಟಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನೂ

ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಬಲಗಡೆಗೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 10ರ ಋಣಘಾತಗಳು ಎಷ್ಟೆಷ್ಟಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುವುವು. ದಾಶಮಿಕ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ದಶಮಾಂಶ ಕ್ರಮವನ್ನೂ ಜೋಡಣೆ ಮಾಡಿದ ಮೇಲೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಸಮರ್ಪಕವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಹಾಯವಾಯಿತು. ಇದೇ ಕ್ರಮವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪದ್ಧತಿಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

$$(122{\cdot}314)_5 = 1\cdot5^2+2\,5^1+2\cdot5^0+3\cdot5^{-1}+1\cdot5^{-2}+4\cdot5^{-3}$$
$$= 1\cdot5^2+2\cdot5+2\cdot1+3\cdot\frac{1}{5}+1\cdot\frac{1}{5^2}+4\cdot\frac{1}{5^3}$$
$$= 1(25)+2(5)+2(1)+3(\tfrac{1}{5})+1(\tfrac{1}{25})+4(\tfrac{1}{125})$$

$$(1101{\cdot}1101)_2 = 1\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0$$
$$+1\cdot2^{-1}+1\cdot2^{-2}+0\cdot2^{-3}+1\cdot2^{-4}$$
$$= 1\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0$$
$$+1\left(\frac{1}{2}\right)+1\left(\frac{1}{2^2}\right)+0\left(\frac{1}{2^3}\right)+1\left(\frac{1}{2^4}\right)$$
$$= 1(8)+1(4)+0(2)+1\cdot1$$
$$+1(\tfrac{1}{2})+1(\tfrac{1}{4})+0(\tfrac{1}{8})+1(\tfrac{1}{16})$$ ಇತ್ಯಾದಿ.

ಹೀಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ತೃಪ್ತಿಕರವಾದ ದಾಶಮಿಕ ಕ್ರಮ ರೂಪಿತವಾದ ಮೇಲೆ, ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಪ್ರಗತಿ ನಾಗಾಲೋಟದಿಂದ ಸಾಗಿತು. ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ, ಭಾಗಹಾರ ಮುಂತಾದ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಸುಲಭವಾದುವು. ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗ, ಘನಗಳನ್ನಾಗಲೀ ವರ್ಗಮೂಲ ಘನಮೂಲಗಳನ್ನಾಗಲೀ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಸುಲಭ ಕ್ರಮಗಳೂ ರೂಪಿತವಾದುವು. ಮುಂದೆ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ (rational numbers) ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ (irrational numbers) ಸ್ವರೂಪ ಚೆನ್ನಾಗಿ ತಿಳಿದು ನೈಜ (real) ಮತ್ತು ಕಾಲ್ಪನಿಕ (imaginary) ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಭಿಪ್ರಾಯ

ಗಳನ್ನೂ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ರೂಪಿಸಿದರು. ಡೆಕಾರ್ಟೆಯ ಬೀಜ ರೇಖಾ ಗಣಿತದ ಆವಿಷ್ಕಾರದಷ್ಟೇ ಅಥವಾ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಾಶಸ್ತ್ಯವನ್ನು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಚರಿತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಈ ದಾಶಮಿಕ ಪದ್ಧತಿಯ ಆವಿರ್ಭಾವಕ್ಕೆ ಕೊಡಬೇಕಾಗುವುದು

ಇಷ್ಟು ಪ್ರಗತಿಪರವಾದ ಕ್ರಮವನ್ನೂ ಬಳಕೆಗೆ ತರಲು ಎಲ್ಲ ದೇಶದವರೂ ಆಲಸ್ಯವನ್ನು ತೋರಿದರೆಂಬುದು ಚರಿತ್ರೆಯಿಂದ ತಿಳಿಯ ಬರುವುದು ದಾಶಮಿಕ ಪದ್ಧತಿಯ ಆವಿಷ್ಕಾರವಾದ ಮೇಲೆ ಶತಮಾನಗಳ ಅನಂತರವೇ ಈ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಜನಾನುರಾಗಕ್ಕೆ ಪಾತ್ರವಾಯಿತು. ಒಳ್ಳೆಯದೋ ಕೆಟ್ಟದ್ದೋ ಹಳೆಯದಕ್ಕೇ ಅಂಟಿಕೊಳ್ಳುವ ಜಾಡ್ಯ ಭಾರತೀಯರಾದ ನಮಗೆ ಮಾತ್ರ ಮೀಸಲಾದದ್ದಲ್ಲ. ಈ ಅಂಕಗಳ ಇತಿಹಾಸ ನಮಗೆ ಶತಮಾನಗಳ ಹಿಂದೆ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಕವಿಯಾದ ಕಾಳಿದಾಸ ಹೇಳಿಕೊಟ್ಟ ಒಂದು ಪಾಠವನ್ನು ಕಲಿಸುತ್ತದೆ.

ಪುರಾಣ ಮಿತ್ಯೇವ ನ ಸಾಧು ಸರ್ವಂ
ನ ಚಾಪಿ ಕಾವ್ಯಂ ನವಂ ಇತ್ಯವದ್ಯಂ
ಸಂತಃ ಪರೀಕ್ಷ್ಯಾನ್ಯತರದ್ಭಜಂತೇ
ಮೂಢಃ ಪರಪ್ರತ್ಯಯನೇಯ ಬುದ್ಧಿಃ

ಹಳೆಯದಾದ ಮಾತ್ರಕ್ಕೇ ಎಲ್ಲವೂ ಸಾಧುವಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಹೊಸದಾದ ಮಾತ್ರಕ್ಕೆ ಅದರಲ್ಲಿ ತಿರುಳಿಲ್ಲವೆಂದಲ್ಲ. ಬುದ್ಧಿವಂತನಾದವನು ವಿವೇಕದಿಂದ ವಿಮರ್ಶೆಮಾಡಿ ಗ್ರಾಹ್ಯ ಅಗ್ರಾಹ್ಯಗಳನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸುತ್ತಾನೆ.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಇತಿಹಾಸ

ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಥವಾ (ಧನ) ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಪದಾರ್ಥಗಳನ್ನು ಎಣಿಸುವಾಗ ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿ ಹುಟ್ಟುತ್ತವೆ. ಆದಿ ಮಾನವನಿಗೆ ವಸ್ತು ನಿರಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭಾವನೆ ಇದ್ದಿರಲಾರದು. ಮನುಷ್ಯನ ಬುದ್ಧಿಶಕ್ತಿ ಬೆಳೆಯುತ್ತ ಬಂದ ಹಾಗೆ ಪದಾರ್ಥಗಳ ಎಣಿಕೆಗೆ ಸಂಬಂಧಪಡದ ಸ್ವತಂತ್ರವಾದ, 1, 2, 3, 4, 5, 6 .... ಮುಂತಾದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಭಾವನೆ ಅವನ ಮನಸ್ಸಿಗೆ ಬಂದಿತು. ಈ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಭಾವನೆಯನ್ನೇ ಆಧಾರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಇನ್ನೂ ನಾನಾ ಮುಖವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿರುವುದು ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಇದೆ. ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ದೈವಸೃಷ್ಟಿಯೆಂದೂ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಉಳಿದ ಭಾವನೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಮಾನವನ ಕಲ್ಪನೆಯೆಂದೂ ಕ್ರಾನೆಕರ್ (Kronecker) ಎಂಬ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಅಭಿಪ್ರಾಯಪಟ್ಟಿದ್ದಾನೆ.

ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಪಡದಂತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೇ ಆರಿಸಿಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣನ, ಭಾಗಹಾರ ಮುಂತಾದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಈ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮೂರು ಮತ್ತು ಎರಡು ಈ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ ಐದು ಎಂದು ಹೇಳುವಾಗ $(3+2=5)$ ಈ ಉಕ್ತಿಗೆ ಏನು ಅರ್ಥವಿರಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ನೋಡೋಣ. ಸೇಬಿನ ಹಣ್ಣಿರುವ ಕೆಲವು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಿವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. ಒಂದನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಮೂರು ಸೇಬು ಹಣ್ಣುಗಳಿದ್ದು ಎರಡನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಹಣ್ಣಿದ್ದರೆ ಎರಡು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಿಂದಲೂ ಒಟ್ಟು ಐದು ಸೇಬಿನ ಹಣ್ಣು ಇದ್ದಂತಾಯಿತು. ಎರಡು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಇರುವ ಸೇಬಿನ ಹಣ್ಣುಗಳು ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟಿವೆ ಎಂದು ನೋಡುವಾಗ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವ ಕ್ರಮ ಮುಖ್ಯವಲ್ಲ. ಮೂರು

ಹಣ್ಣಿರುವ ಒಂದನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಮುಂಚೆ ಆರಿಸಿ ಅನಂತರ ಎರಡು ಹಣ್ಣಿರುವ ಎರಡನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಆರಿಸಿದರೂ ಎರಡು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಿಂದ ಐದು ಸೇಬಿನ ಹಣ್ಣುಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಈಗ ಎರಡು ಹಣ್ಣಿರುವ ಎರಡನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಮುಂಚೆ ಆರಿಸಿ ಮೂರು ಹಣ್ಣಿರುವ ಮೊದಲನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಅನಂತರ ಆರಿಸಿದರೂ ಎರಡು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಿಂದ ಒಟ್ಟು ಐದು ಸೇಬಿನ ಹಣ್ಣುಗಳಿರುತ್ತವೆ.

$$3+2=5$$

$$2+3=3+2=5$$

ವಸ್ತು ನಿರಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೇಲೆ ಸಂಕಲನ ಮುಂತಾದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ನಡೆಸಿದರೂ ಇಂಥ ಉಕ್ತಿಗಳನ್ನು ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನೋಡಿದಾಗ ಮಾತ್ರ ಲೋಕ ವ್ಯವಹಾರಕ್ಕೆ ಆ ಉಕ್ತಿಗಳು ಸಂಬಂಧಪಡುತ್ತವೆ. ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ ಮುಂತಾದ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಗಳ ನಿರೂಪಣೆಗೆ ಲೋಕವ್ಯವಹಾರವೇ ಆಧಾರಭೂತವಾದ ಸ್ಫೂರ್ತಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ ಎಂದೂ ಹೇಳಬಹುದು.

ಯಾವ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದರೂ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಸಂಕಲನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯ ಪರಿಪೂರ್ಣವಾಗಿದೆ.

a ಮತ್ತು b ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದರೆ ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ c ಎಂಬ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಇದ್ದೇ ಇರುವುದು. ಈ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡುವ ಕ್ರಮವೂ ಮುಖ್ಯವಲ್ಲ. ಇದನ್ನೇ ನಾವು

$$(1)\ a+b=c$$

$$(2)\ a+b=b+a=c$$

ಎಂಬ ಉಕ್ತಿಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. (2)ರಲ್ಲಿ ಬರೆದಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವ್ಯತ್ಯಯ ನಿಯಮ (commutative law) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಎರಡು, ಮೂರು ಮತ್ತು ಆರು ಸೇಬಿನ ಹಣ್ಣಿರುವ ಮೂರು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ಯಾವ ಯಾವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಜೋಡಿಸಬಹುದು. ಮೂರು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲೂ ಒಟ್ಟು $(2+3+6=11)$ ಹನ್ನೊಂದು ಸೇಬಿನ ಹಣ್ಣುಗಳೇ ಇರುತ್ತವೆ

$$(2+3)+6=2+(3+6)$$

ಈ ನಿಯಮ ಯಾವ ಮೂರು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೂ ಅನ್ವಯಿಸುವುದು.

a, b, c ಮೂರು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದರೆ,

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

ಇದನ್ನು ಸಂಕಲನದ ನಿರಪೇಕ್ಷ ಸಂಯೋಗ ನಿಯಮ (associative law) ಎನ್ನುವೆವು.

ಹೀಗೆಯೇ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟಂತೆಯೂ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ವ್ಯತ್ಯಯ ನಿಯಮವನ್ನೂ ನಿರಪೇಕ್ಷ ಸಂಯೋಗ ನಿಯಮವನ್ನೂ ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ.

ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ಮೂರು ಸೇಬಿನ ಹಣ್ಣಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಿದ್ದರೂ ಒಟ್ಟು ಹನ್ನೆರಡು ಸೇಬಿನ ಹಣ್ಣುಗಳು ಇರುವುವು. ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ನಾಲ್ಕು ಹಣ್ಣಿರುವ ಮೂರು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಿದ್ದರೂ ಒಟ್ಟು ಹನ್ನೆರಡು ಸೇಬಿನ ಹಣ್ಣುಗಳು ಇರುವುವು.

$$3\times4=4\times3=12$$

$$(3\times4)\times5=3\times(4\times5)=60.$$

ಈ ನಿಯಮಗಳು ಯಾವ ಮೂರು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗಾಗಲೀ ಸರಿಹೊಂದುವುದರಿಂದ a, b, c ಮೂರು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದರೆ

$$a\times b=b\times a$$

ಇದು ಗುಣನದ ವ್ಯತ್ಯಯ ನಿಯಮ (commutative law of multiplication)

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

ಇದು ಗುಣನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ನಿರಪೇಕ್ಷ ಸಂಯೋಗ ನಿಯಮ (associative law of multiplication).

ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ನಾಲ್ಕು ಹಣ್ಣುಗಳಿರುವ ಮೂರು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಿವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ ಹಾಗೆಯೇ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ಐದು ಹಣ್ಣುಗಳಿರುವ ಮೂರು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಿವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. ಈಗ ಮೊದಲನೇ ಮೂರು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು 3×4 ಅಥವಾ 12 ಹಣ್ಣುಗಳಿವೆ. ಎರಡನೇ ಗುಂಪಿನ ಮೂರು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಒಟ್ಟು ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $3 \times 5 = 15$. ಎಲ್ಲ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಒಟ್ಟು 27 ಹಣ್ಣುಗಳು ಇದ್ದಂತಾಯಿತು.

ಆರು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಇರುವ ಹಣ್ಣುಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಮೊದಲನೇ ಮೂರು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಎರಡನೇ ವರ್ಗದಲ್ಲಿರುವ ಐದು ಹಣ್ಣುಗಳಿರುವ ಮೂರು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಿಗೂ ನಾಲ್ಕು ನಾಲ್ಕು ಹಣ್ಣುಗಳಂತೆ ವರ್ಗಾಯಿಸಿದರೆ ಮೊದಲನೇ ವರ್ಗದ ಮೂರು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳೂ ಖಾಲಿಯಾಗುತ್ತವೆ. ಎರಡನೇ ವರ್ಗದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಒಂಬತ್ತು ಹಣ್ಣುಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಈ ಮೂರು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಿಂದ ಒಟ್ಟು $3 \times 9 = 27$ ಹಣ್ಣುಗಳು ಇದ್ದಂತಾಯಿತು.

ಆದ್ದರಿಂದ $3\,(4+5) = 3 \times 4 + 3 \times 5$

ಈ ನಿಯಮ ಯಾವ ಮೂರು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗಾಗಲೀ ಅನ್ವಯವಾಗುವುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಈ ರೀತಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

a, b, c ಮೂರು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿದ್ದರೆ

$$a\,(b+c) = a \times b + a \times c$$

ಇದನ್ನು ವಿತರಣ ನಿಯಮ (distributive law) ಎಂದು ಕರೆಯುವರು. ಈ ನಿಯಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣನವೆಂಬ ಎರಡು ಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸಿದೆ.

ಸಂಕಲನದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ನಡುವೆ ಅಸಮತೆಯ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ರೂಪಿಸಿದೆ. ವ್ಯವಹಾರದ ಆಧಾರದಮೇಲೆಯೂ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಎಂಬ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಬರುವುದು.

ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಐದು ಹಣ್ಣುಗಳಿದ್ದು ಮತ್ತೊಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಮೂರು ಹಣ್ಣುಗಳಿದ್ದರೆ ಮೊದಲನೇ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಹಣ್ಣುಗಳಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಮೂರು ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಎರಡನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಐದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗುವುದರಿಂದ ಐದು, ಮೂರಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಎಂದು ಹೇಳುವೆವು ಇದನ್ನು $5>3$ ಈ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ (ಐದು ಮೂರಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು) ಅಥವಾ $3>5$ (ಮೂರು ಐದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆ).

a, b, c ಮೂರು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿದ್ದು $b=a+c$ ಆದರೆ, bಯು aಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದು ($b>a$) ಅಥವಾ aಯು bಗಿಂತ ಚಿಕ್ಕದು.

a ಮತ್ತು b ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದರೆ ಅವೆರಡರ ಸಂಬಂಧ ಕೆಳಗೆ ತಿಳಿಸಿರುವ ಮೂರು ಸಂಬಂಧಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿರುವುದು.

(1) $a=b$ (ಎರಡೂ ಸಮನಾಗಿರಬಹುದು)

(2) $a<b$ (ಮೊದಲನೆಯದು ಎರಡನೆಯದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆ)

(3) $a>b$ (ಮೊದಲನೆಯದೇ ಹೆಚ್ಚು)

ಮೂರಕ್ಕೆ ಎರಡನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಐದಾಗುವುದರಿಂದ ಐದು ಮತ್ತು ಮೂರು ಇವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎರಡಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗುವುದು ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

$$3+2=5$$

ಆದ್ದರಿಂದ $5-3=2$

ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ, $b=a+c$ ಆದರೆ

$$c=b-a$$

c ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕ b ಮತ್ತು a ಗಳ ನಡುವಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಮ ಇಲ್ಲಿ b ಯು a ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ ಮಾತ್ರ ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಅರ್ಥವುಂಟು. ಮುಂದೆ ಈ ಅಭಿಪ್ರಾಯವನ್ನು ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಿಗೂ ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತೇವೆ. b ಯಲ್ಲಿ a ಯನ್ನು ಕಳೆಯುವುದರ ಅರ್ಥವನ್ನು ಅಥವಾ ವ್ಯವಕಲನವನ್ನು ಸಂಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಯ ಮೂಲಕ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ವ್ಯವಕಲನ ಸಂಕಲನದ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆ (inverse operation).

ಈಗ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಂಪಿಗೆ ಶೂನ್ಯವನ್ನು 0 ಎಂಬ ಗುರುತಿನಿಂದ ಸೂಚಿಸಿ, ಶೂನ್ಯವನ್ನೂ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವೆಂದು ಕರೆದು, ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಂಪನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತೇವೆ. 0 ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕದೊಡನೆ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣನ ಮಾಡುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಹೇಳಬೇಕಾಗುವುದು. ಮೂರು ಹಣ್ಣಿರುವ ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. ಮತ್ತೊಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆ ಖಾಲಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಈ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲಿರುವ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 3 ಮತ್ತು 0. ಎರಡು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು 3 ಹಣ್ಣುಗಳೇ ಇದ್ದಂತಾಯಿತು.

$$3+0=3$$

a ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೆ, $a+0=a$

ಹೀಗೆಯೇ ಹಣ್ಣುಗಳೇ ಇಲ್ಲದ ಮೂರು ಖಾಲಿ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 0 ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $3\times0=0$

a ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೆ $a\times0=0$.

ನಾಲ್ಕು ಹಣ್ಣಿರುವ ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಎಲ್ಲ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನೂ ಹೊರಕ್ಕೆ ತೆಗೆದರೆ ಪೆಟ್ಟಿಗೆ ಖಾಲಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

$$4-4=0$$

a ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೆ, $a-a=0$.

ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣನ ಕ್ರಿಯೆಗಳು ಪಾಲಿಸುವ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿಯಾಯಿತು. ದೈನಂದಿನ ವ್ಯವಹಾರಗಳಿಂದ ಪಡೆದ ಒಂದು ಸ್ಫೂರ್ತಿಯಿಂದ ಈ ನಿಯಮಗಳ ನಿರೂಪಣೆ ಪ್ರಭಾವಿತಗೊಂಡಿರುವುದು ಸುವ್ಯಕ್ತ.

ಪಿಯಾನೋವಿನ ಅಂಗೀಕೃತ ಭಾವನೆಗಳು

ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದು, ಎರಡು, ಮೂರು, ನಾಲ್ಕು ಎಂದು ಎಣಿಸುತ್ತ ಹೋದರೆ ಅವು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುತ್ತಲೇ ಇರುವುವು. ನೂರರವರೆಗೆ ಎಣಿಸುತ್ತ ಹೋದರೆ ನೂರಕ್ಕೆ ಒಂದನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ ಅದರ ಮುಂದಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದ ನೂರೊಂದು ಬರುತ್ತದೆ. n ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಹೇಳಿದ ತತ್‌ಕ್ಷಣವೇ ಅದಕ್ಕೆ ಒಂದನ್ನು ಸೇರಿಸಿ $n+1$ ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಪಿಯಾನೋ ಎಂಬ ಇಟಲಿಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಈ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ಅಂಗೀಕೃತ ಭಾವನೆಗಳ ಮೂಲಕ ನಿರೂಪಿಸಿದನು. ಈ ಆಧಾರ ಭಾವನೆಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

N ಎಂಬುದು ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ (natural numbers) ಸಮುಚ್ಚಯವಾದರೆ

(1) $1 \in N$ (N ಚಯಕ್ಕೆ 1 ಸೇರಿದೆ ಎಂದು ಅಭಿಪ್ರಾಯ). ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಇಲ್ಲದೆ ಇಲ್ಲ. ಇದರಲ್ಲಿ 1 ಎಂಬುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಇದೆ.

(2) ಈ ಸಮುಚ್ಚಯಕ್ಕೆ ಸೇರಿದ m ಎಂಬ ಯಾವ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ m^1 ಎಂಬ ಅದಕ್ಕೆ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಮತ್ತು ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಒಂದು ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದೇ ಇರುವುದು ($m^1=m+1$).

(3) m ಎಂಬುದು ಈ ಸಮುಚ್ಚಯಕ್ಕೆ ಸೇರಿದ ಒಂದು ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ $m^1 \neq 1$.

1 ಎಂಬ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತೊಂದು ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗುದಲ್ಲ.

(4) $m^1 = n^1$ ಆಗುವಂತೆ m ಮತ್ತು n ಎರಡು ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $m = n$.

(5) K ಎಂಬುದು ಕೆಲವು ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯು ವಾಗಿರಲಿ.

ಈ ಸಮುಚ್ಚಯದಲ್ಲಿ 1 ಎಂಬ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದು k ಎಂಬ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಈ ಸಮುಚ್ಚಯದಲ್ಲಿದ್ದಾಗಲೆಲ್ಲ 1 ಅದರ ಅನುಕ್ರಮಿಯಾದ k^1 $(=k+1)$ ಈ ಸಮುಚ್ಚಯದಲ್ಲಿ ಸೇರಿದ್ದರೆ, ಆಗ K ಎಂಬ ಈ ಸಮುಚ್ಚಯದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಇರುವುವು. ಎಂದರೆ $K = N$.

ಈ ಐದು ಅಂಗೀಕೃತ ಭಾವನೆಗಳ ಆಧಾರದಮೇಲೆಯೇ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನ, ಗುಣನಗಳನ್ನು ಅನುರೂಪವಾಗಿ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ ಮಾಡಿದಾಗ, ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣನ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವ್ಯತ್ಯಯನಿಯಮ, ನಿರಪೇಕ್ಷ ಸಂಯೋಗನಿಯಮ, ವಿತರಣನಿಯಮ ಮುಂತಾದ ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲಭೂತ ನಿಯಮಗಳೆಲ್ಲವನ್ನು ಪಡೆಯ ಬಹುದೆಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಅನುಮಿತಿಕ್ರಮ (method of mathematical induction)

ಐದನೆಯ ಅಂಗೀಕೃತ ಭಾವನೆ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಅನುಮಿತ ಕ್ರಮ ವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವುದು. ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು ಒಂದೇ ತೆರನಾದ ಒಂದು ಪ್ರಯೋಗ ವನ್ನು ಅನೇಕ ಬಾರಿ ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ ಪ್ರಯೋಗಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ನಿಯಮವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತಾರೆ. ಹೀಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿದ ನಿಯಮದ

ಸತ್ಯತೆಯೂ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಅನುಮಿತಿ ಕ್ರಮದಿಂದ ಸ್ಥಾಪಿಸಿದ ನಿಯಮದ ಸತ್ಯತೆಯು ಸಮಕ್ಕೆ ಬರಲಾರದು. ಪ್ರತಿದಿನವೂ ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ಸೂರ್ಯ ಹುಟ್ಟುವುದನ್ನು ನೋಡಿ ನಾಳೆದಿವಸ ಬೆಳಿಗ್ಗೆಯೂ ಸೂರ್ಯನು ಹುಟ್ಟುವ ನೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸೂರ್ಯ ನಾಳೆ ಬೆಳಿಗ್ಗೆ ಹುಟ್ಟುವುದು ನಿಜವಾದರೂ ಈ ತೀರ್ಮಾನದ ನಿಖರತೆಗಿಂತ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಅನುಮಿತಿ ಕ್ರಮದಿಂದ ಸ್ಥಾಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ನಿಯಮದ ನಿಖರತೆ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ನಿಸ್ಸಂಶಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ದೃಷ್ಟವಾದ ನಿದರ್ಶನಗಳಿಂದ ಅದೃಷ್ಟಾರ್ಥವನ್ನು ಊಹಿಸುವ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ದರ್ಶನಗಳಲ್ಲಿ ಅನುಮಾನವೆಂದು ಹೆಸರು. ಅಡಿಗೆಮನೆಯಲ್ಲಿ ಹೊಗೆಯಿದ್ದಾಗಲೆಲ್ಲ ಬೆಂಕಿಯನ್ನು ಕಂಡಿರುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ದಿನ ದೂರದ ಬೆಟ್ಟದ ಮೇಲೆ ಹೊಗೆಯನ್ನು ನೋಡಿ ಅಲ್ಲಿಯೂ ಆ ಸಮಯ ದಲ್ಲಿ ಬೆಂಕಿ ಇರಬೇಕೆಂದು ಊಹಿಸುತ್ತೇವೆ. ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಅನುಮಾನ ವೆಂಬ ಶಬ್ದಕ್ಕೆ ಸಂದೇಹವೆಂಬ ಅರ್ಥ ಬಂದಿರುವುದರಿಂದ ಅನುಮಿತಿ ಎಂಬ ಶಬ್ದವನ್ನೇ ಇದರ ಬದಲಾಗಿ ಬಳಸುವುದು ಉತ್ತಮ.

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿಯೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟಂತೆ ಕೆಲವು ನಿಯಮಗಳ ಸತ್ಯತೆ ಕೆಲವು ನಿದರ್ಶನಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂದರ್ಭಗಳು ಬರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಕೇವಲ ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸತ್ಯವಾಗಿ ಕಂಡುಬರುವ ಈ ನಿಯಮಗಳು ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಸತ್ಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬ ಭರವಸೆ ಏನೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಕೆಲವು ಉದಾ ಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ಈ ವಿಚಾರ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 1

1, 3, 5, 7, 9, ... ಮುಂತಾದ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಿದರ್ಶನ ವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ

$$1+3=4=2^2$$
$$1+3+5=9=3^2$$
$$1+3+5+9=16=4^2$$

ಮೊದಲನೇ ಎರಡು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ = 4 = ಎರಡರವರ್ಗ
ಮೊದಲನೇ ಮೂರು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ = 9 = ಮೂರರವರ್ಗ
ಮೊದಲನೇ ನಾಲ್ಕು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ = 16 = ನಾಲ್ಕರವರ್ಗ

ಈ ನಿದರ್ಶನಗಳಿಂದ ಉತ್ತೇಜಿತರಾಗಿ ಮೊದಲನೆಯ ಐವತ್ತು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಐವತ್ತರ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವುದೆಂದು ಊಹಿಸಬಹುದು. 1 ರಿಂದ 100 ರ ಒಳಗೆ ನೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಐವತ್ತು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಐವತ್ತು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ ಐವತ್ತನೇ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ 99.

$$1+3+5+7+ \dots +99=50^2=50\times 50$$

$=2500$ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಬರೆದು ಕೂಡಿದರೂ ಇಷ್ಟೇ ಬರುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಊಹೆ ಸರಿಹೋಯಿತು.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನೇ ವಿಸ್ತರಿಸಿ, ಮೊದಲನೇ n ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ n^2 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮನಾಗಿರುವುದೇ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿಚಾರ ಮಾಡಬೇಕಾಗುವುದು.

ಆದರೆ ಒಂದು ಸೂತ್ರ ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಪಕ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ನಿಜವಾದ ಮಾತ್ರಕ್ಕೆ ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಸರಿಯಾಗಿರುವುದೆಂದು ಹೇಳಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ.

$$p(n)=2^{2^n}+1$$

ಇದರಲ್ಲಿ $n=0, 1, 2, 3, 4, \dots$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹಾಕೋಣ.

$n=0$ ಆದಾಗ $p(0)=2^{2^0}+1=2^1+1=2+1=3$ $[2^0=1]$

$n=1$ ಆದಾಗ $p(1)=2^{2^1}+1=2^2+1=4+1=5$

$n=2$ ಆದಾಗ $p(2)=2^{2^2}+1=2^4+1=16+1=17$

$n=3$ ಆದಾಗ $p(3)=2^{2^3}+1=2^8+1=256+1=257$

$n=4$ ಆದಾಗ $p(4)=2^{2^4}+1=2^{16}+1=65536+1=65537$

ಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವ 3, 5, 17, 257 ಮತ್ತು 65537 ಇವೆಲ್ಲವೂ ಅವಿಭಾಜ್ಯ (ಅನಪವರ್ತ್ಯ) ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಥವಾ ಪ್ರಧಾನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (prime numbers) ಎಂದರೆ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತೆರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. 3 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 3 ರಿಂದ ಅಥವಾ 1 ರಿಂದ ಹೊರತು ಇನ್ನು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದಲೂ ಭಾಗವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. a ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕ a ಮತ್ತು 1 ಇವೆರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಇನ್ನು ಯಾವ ಪೂರ್ಣಾಂಕದಿಂದಲೂ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗದೆ ಇದ್ದರೆ ಆಗ a ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ (ಅನಪವರ್ತ್ಯ) ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ಪ್ರಧಾನ ಸಂಖ್ಯೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

$2^{2^n}+1$ ಎಂಬ ಉಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ n ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 0, 1, 2, 3, 4 ಎಂಬ ಕೆಲವು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಬಂದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲ ಪ್ರಧಾನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಆದುದರಿಂದ ಈ ಉಕ್ತಿ n ನ ಎಲ್ಲ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯಾ ಮೌಲ್ಯಗಳಿಗೂ ಪ್ರಧಾನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೇ ಕೊಡುವುದೆಂದು ಫರ್ಮಾಟ್ (Fermat) ಎಂಬ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ತಿಳಿದಿದ್ದ. ಆದರೆ

$$p(n)=2^{2^n}+1 \text{ ನಲ್ಲಿ}$$

$n=5$ ಆದಾಗ $p(5)=2^{2^5}+1=2^{32}+1$

$$=4294967297$$

ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಪ್ರಧಾನ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲವೆಂದು ಆಯಿಲರ್ ಎಂಬ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ತೋರಿಸಿದ.

ಏಕೆಂದರೆ $4294967297=641\times 6700417$

ಈ ಸಂಖ್ಯೆ 641 ರಿಂದಲೂ 6700417 ರಿಂದಲೂ ಭಾಗವಾಗುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ $p(n) = 2^{2^n}+1$ ಎಂಬ ಉಕ್ತಿ n ನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಪ್ರಧಾನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುವುದಿಲ್ಲ.

ಮತ್ತೊಂದು ನಿದರ್ಶನ

$$p(n)=991\,n^2+1$$

ಇಲ್ಲಿ $n=1$ ಆದಾಗ $p(1)=991\cdot1^2+1=991+1=992$

$n=2$ ಆದಾಗ $p(2)=991\cdot2^2+1=991\cdot4+1=3965$

$n=3$ ಆದಾಗ $p(3)=991\cdot3^2+1=991\cdot9+1=8920$

$n=4, 5, 6, 7$ .... ಮುಂತಾದ ಯಾವ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ n ನ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದರೂ ಬರುವ 992, 3965, 8920 ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಮತ್ತೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವರ್ಗವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ ಈ ನಿದರ್ಶನಗಳಿಂದ ಪ್ರಭಾವಿತರಾಗಿ ಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವ ಉಕ್ತಿ n ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೂ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವನ್ನು ಕೊಡುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ಹೇಳಿದರೆ ತಪ್ಪಾಗುವುದು. ಎಂಟಿ ಗಟ್ಟಲೆ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಿದರೂ $991\,n^2+1$ ನ ಬೆಲೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಲ್ಲವೆಂದೇ ತೋರುವುದು.

ಆದರೆ $n=12055735790331359447442538767$ ಆದಾಗ $991\,n^2+1$ ಎಂಬ ಉಕ್ತಿ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೆಲವು ವಿಚಾರಗಳ ಸತ್ಯತೆ ಕೆಲವು ನಿದರ್ಶನಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬಂದ ಮಾತ್ರಕ್ಕೆ ಎಲ್ಲ ಪಕ್ಷಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಅವುಗಳು ಸತ್ಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗದು. ಇಂಥ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸೂತ್ರಗಳ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಸಂಶಯಾತೀತವಾಗಿ ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಗಣಿತದ ಅನುಮಿತಿ ಕ್ರಮ ಸಹಾಯಮಾಡುವುದು. ಈ ಕ್ರಮದ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯವನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

ಇದರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಹಂತಗಳಿವೆ.

ಮೊದಲನೆಯ ಹಂತ

$p(n)$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರ ನಿಜವಾಗಿದ್ದರೆ $p(n+1)$ ನ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಇದರಿಂದ ಸ್ಥಾಪಿಸುವುದು.

ಎಂದರೆ ಸೂತ್ರವನ್ನು n ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ನಿಜವೆಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ ಇದರಿಂದ ಸೂತ್ರ $(n+1)$ ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೂ ನಿಜವಾಗಿರುವುದೆಂದು ತೋರಿಸುವುದು.

ಎರಡನೇ ಹಂತ

ಅನಂತರ ಸೂತ್ರ n ನ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗೆ ನಿಜವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುವುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ($n=1$ ಆದಾಗ ಅಥವಾ $n=2$ ಆದಾಗ).

ಈ ಎರಡು ಹಂತಗಳನ್ನೂ ಒಟ್ಟಿಗೇ ಸೇರಿಸಿದರೆ n ಯಾವ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ ಸೂತ್ರ ನಿಜವಾಗಿರುವುದೆಂದು ಸ್ಥಾಪಿಸಿದಂತಾಯಿತು.

$n=1$ ಆದಾಗ ಸೂತ್ರ ನಿಜವಾಗಿದ್ದರೆ $p(n)$ ಸೂತ್ರ n ನ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗೆ ನಿಜವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದಂತಾಯಿತು. ಎರಡನೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಹಾಕಿರುವ ನಿಬಂಧನೆ ಸರಿಹೋಯಿತು. ಈಗ ಮೊದಲನೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಹಾಕಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಯೂ ಸರಿಹೋಯಿತು ಎನ್ನೋಣ, ಎಂದರೆ $p(n)$ ಸೂತ್ರ n ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ನಿಜವಾಗಿದ್ದಾಗಲೆಲ್ಲ $(n+1)$ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೂ ನಿಜವಾಗಿರುವುದು ಎಂದು ಹೇಳಿದಂತಾಯಿತು. $p(n)$ ಸೂತ್ರ $n=1$ ಆದಾಗ ನಿಜ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸೂತ್ರ $n=1+1=2$ ಆದಾಗಲೂ ನಿಜ. ಸೂತ್ರ $n=2$ ಆದಾಗ ನಿಜವಾದುದರಿಂದ, $n=2+1=3$ ಆದಾಗಲೂ ನಿಜ. ಹೀಗೆಯೇ ವಾದಮಾಡುತ್ತ ಹೋದರೆ n ಯಾವ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೂ ಸರಿ $p(n)$ ಸೂತ್ರ ನಿಜವೆಂದು ಸ್ಥಾಪಿಸಿದಂತಾಗುವುದು. ಈಗ ಅನುಮಿತಿ ಕ್ರಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕೊಡುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸೋಣ.

1, 3, 5, 7, 9, ... ಮುಂತಾದುವು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

$$1\text{ನೇ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ}=1=2\cdot1-1$$
$$2\text{ನೇ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ}=3=2\cdot2-1$$
$$3\text{ನೇ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ}=5=2\cdot3-1$$
$$50\text{ನೇ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ}=99=2\cdot50-1$$

ಆದ್ದರಿಂದ

$$n\text{ನೇ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ}=2\cdot n-1=2n-1$$
$$S(n)=1+3+5+7+ \dots +(2n-1)$$
= ಮೊದಲನೇ n ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ

$$S(1)=1=1^2$$
$S(2)=1+3=4=2^2$= ಮೊದಲನೇ ಎರಡು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ

$S(3)$ = ಮೊದಲನೇ ಮೂರು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ
$=1+3+5=9=3^2$

ಆದ್ದರಿಂದ

$S(n)$ = ಮೊದಲನೇ n ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ
$=1+3+5+ \dots (2n-1)$
$=n^2$ ಎಂದು ಹಿಂದೆ ಊಹಿಸಿದ್ದೆವು

ಅನುಮಿತಿ ಕ್ರಮದ ಮೊದಲನೇ ಹಂತ

$S(n)=n^2$ ಆದರೆ

$S(n+1)=(n+1)^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಮೊದಲನೇ n ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ n^2 ಗೆ ಸಮನೆಂಬ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡು, ಸೂತ್ರ ಮೊದಲನೇ $(n+1)$ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ

ಮೊತ್ತಕ್ಕೂ ಸರಿಹೋಗುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು, ಎಂದರೆ ಮೊದಲನೇ $(n+1)$ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ $(n+1)^2$ ಆಗುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

$$S(n)=1+3+5+ \dots +(2n-1)=n^2$$

ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಎರಡನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಅದರ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರುವುದು. ಮೂರನೇ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ 5. 5ಕ್ಕೆ 2ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಬರುವ 7 ಮುಂದಿನ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ.

nನೇ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ $=2n-1$

$(2n-1)+2=2n+1=(n+1)$ನೇ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ

$S(n+1)=$ ಮೊದಲನೇ $(n+1)$ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ

$$=1+3+5+ \dots +(2n-1)+(2n-1)$$
$$=\{1+3+5+ \dots +(2n-1)\}+(2n+1)$$
$$= S(n) +(2n+1)$$
$$= n^2 +2n+1$$

ಕಾರಣ, $S(n)=n^2$]

$$=(n+1)^2$$

$\therefore S(n+1)=(n+1)^2$

$\therefore S(n)=n^2$ ಎಂಬುದು ನಿಜವಾದರೆ $S(n+1)=(n+1)^2$

ಅನುಮಿತಿ ಕ್ರಮದ ಮೊದಲನೇ ಹಂತವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಿದಂತಾಯಿತು. ಈಗ ಸೂತ್ರ $n=1$, $n=2$ ಆದಾಗ ನಿಜವೆಂದು ಹಿಂದೆಯೇ ಹೇಳಿಯಾಯಿತು.

$$S(1)=1=1^2$$
$S(2)=1+3=4=2^2$ ಇತ್ಯಾದಿ

ಎಂದರೆ ಅನುಮಿತಿ ಕ್ರಮದ ಎರಡನೇ ಹಂತವೂ ಸರಿಹೋಯಿತು. ಈ ಎರಡು ಹಂತಗಳಿಂದ

$$S(n)=1+3+5+ \dots +(2n-1)=n^2$$

ಎಂಬ ಸೂತ್ರ, n ಯಾವ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ ನಿಜವೆಂದು ತೋರಿಸಿದಂತಾಯಿತು.

ಸೂತ್ರ n ಎಂಬ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾದಾಗ ಅದರ ಮುಂದಿನ $(n+1)$ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೂ ಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆಂದು ಸ್ಥಾಪಿಸುವ ಮೊದಲನೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಮಹತ್ತರವಾದ ಶಕ್ತಿ ನಿಗೂಢವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಈ ಹಂತವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವುದರಿಂದ nನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೂ ಆ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟೇ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರಲಿ ಸೂತ್ರ ಸುಳ್ಳಾಗಲಾರ ದೆಂಬುದನ್ನು ಖಚಿತಪಡಿಸಿದಂತಾಗುವುದು. ಅನಂತರ ಸೂತ್ರದ ಸತ್ಯತೆ ಯನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು nನ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗೆ ಸೂತ್ರ ಸರಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿದರಾಯಿತು.

ಅನುಮಿತಿ ಕ್ರಮದ ಹೆಚ್ಚು ಶಕ್ತಿ ಮೊದಲನೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಅಡಗಿದೆ. ಒಬ್ಬ ಕುರುಡ ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಆಸೆಗಳನ್ನು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು ಇಷ್ಟಾರ್ಥಸಿದ್ಧಿಗಾಗಿ ದೇವರನ್ನು ಕುರಿತು ಅನೇಕ ವರ್ಷಗಳಕಾಲ ತಪಸ್ಸು ಮಾಡಿದನಂತೆ. ಅನಂತರ ದೇವರು ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷನಾಗಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ವರವನ್ನು ಕೇಳುವಂತೆ ಆವನಿಗೆ ತಿಳಿಸಿದನು. ಕುರುಡನಿಗೆ ದಿಗ್ಭ್ರಾಂತಿಯೇ ಆಯಿತು. ಅವನು ಬಡವನಾಗಿದ್ದ. ಬಹಳಕಾಲ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬದುಕುವ ಆಸೆಯೂ ಇತ್ತು. ಅವನು ಬುದ್ಧಿವಂತನಾಗಿದ್ದುದರಿಂದ ದೇವರನ್ನು ಒಂದೇ ಒಂದು ವರವನ್ನೇ ಕೊಡುವಂತೆ ಕೇಳಿದ "ದೇವರೇ, ನನ್ನ ಮರಿಮಗನು ಈ ರಾಜ್ಯದ ಅಧಿಪತಿಯಾಗಿ ಬಾಳುವುದನ್ನು ನಾನು ಕಣ್ಣಾರೆ ನೋಡಿ ಸಂತೋಷಪಟ್ಟು ಬಾಳಬೇಕು" ಎಂದು. ಅವನ ಇಷ್ಟಾರ್ಥಗಳೆಲ್ಲ ಈ ಒಂದೇ ಒಂದು ವರದಿಂದ ಈಡೇರಿದುವು. ಮರಿಮಗ ಹುಟ್ಟುವವರೆಗೆ ಬದುಕಬೇಕು. ಅವನು ರಾಜನಾಗಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇವನಿಗೆ ಐಶ್ವರ್ಯವೂ ಬರಬೇಕು. ಅವನನ್ನು ನೋಡಿ ಬಾಳಬೇಕಾಗಿರುವುದ ರಿಂದ ಇವನಿಗೆ ಕಣ್ಣು ಬರಬೇಕು. ಈ ಕುರುಡ ಕೇಳಿದ ಒಂದು ವರದ ಪ್ರಭಾವದಂತೆ ಇದೆ ಅನುಮಿತಿಕ್ರಮದ ಮೊದಲನೇ ಹಂತದ ಪ್ರಭಾವ.

ಆದರೆ ಒಂದು ಸೂತ್ರದ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಎರಡು ಹಂತಗಳೂ ಆವಶ್ಯಕ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅದರ ಮುಂದಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಸಮನೆಂದು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ನೋಡೋಣ. n ಎಂಬುದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೆ $(n+1)$ ಅದರ ಮುಂದಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ. ಅನುಮಿತಿಯ ಮೊದಲನೇ ಹಂತವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು n ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅದರ ಮುಂದಿನ $(n+1)$ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಸಮನಾದರೆ $(n+1)$ ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅದರ ಮುಂದಿನ $(n+2)$ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದೇ ಇರುವುದೆಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು.

$$n = n + 1 \quad \text{ಆದರೆ}$$

ಎರಡು ಕಡೆಗೂ ಒಂದನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ

$$(n+1) = (n+1) + 1$$

$$\therefore \quad n + 1 = n + 2$$

ಅನುಮಿತಿ ಕ್ರಮದ ಮೊದಲನೇ ಹಂತವೇನೋ ಸರಿಹೋಯಿತು. ಆದರೆ ಅನುಮಿತಿ ಕ್ರಮದ ಎರಡನೇ ಹಂತವನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಇಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ $n = n + 1$ ಸೂತ್ರ nನ ಯಾವ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗೂ ಸರಿ ಹೋಗಲಾರದು. ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $n = 1$ ಆದರೆ

$$1 = 1 + 1$$

ಅಥವಾ $1 = 2$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಇದು ಸರಿಯಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅದರ ಮುಂದಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಸಮವೆಂದು ಸಾಧಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದಲೂ ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿದ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದಲೂ ಒಂದು ಸೂತ್ರದ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಲು ಅನುಮಿತಿ ಕ್ರಮದ ಎರಡು ಹಂತಗಳೂ ಅತ್ಯಾವಶ್ಯಕವೆಂದು ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಂಖ್ಯಾಭಾವನೆಯಲ್ಲಿ ಆದ ಪ್ರಗತಿ

ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಕ್ಕೆ ಬರುವುದಕ್ಕೂ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಬೆಳೆವಣಿಗೆಯ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದಲೂ ಪದಾರ್ಥಗಳನ್ನು ಎಣಿಸುವ ಭಾವನೆಯಿಂದ ಉತ್ಪನ್ನವಾದ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಂಪಿಗೆ 0 ಎಂಬ ಗುರುತಿನಿಂದ ಸೂಚಿಸುವ ಶೂನ್ಯವನ್ನೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನೂ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಸೇರಿಸಿ ವಿಸ್ತರಿಸಬೇಕಾಯಿತು. ಸೆಕೆಂಡರಿ ಶಾಲೆಗೆ ಹೋಗುವ ಮಕ್ಕಳು ಕೂಡ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನ, ಗುಣನ ಮುಂತಾದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಮಾಡುತ್ತಾರೆ.

ಪದಾರ್ಥಗಳನ್ನು ಎಣಿಸಲು ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಥವಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಅಳೆಯುವ ಮತ್ತು ಪದಾರ್ಥಗಳನ್ನು ತೂಕಮಾಡುವ ಪ್ರಸಂಗಗಳೂ ಬರುತ್ತವೆ. ಈ ಉದ್ದೇಶಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತರಹದ ಅಳತೆಗೂ ಒಂದು ಮೂಲಮಾನವನ್ನು ಆರಿಸುತ್ತೇವೆ ಅಳೆಯುವ ವಸ್ತುವಿನಲ್ಲಿ ಈ ತರಹದ ಮೂಲಮಾನಗಳು ಎಷ್ಟಿವೆ ಎಂದು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಎಂದರೆ ಅಳೆಯುವ ಕೆಲಸವನ್ನು ಎಣಿಸುವ ಕೆಲಸವನ್ನಾಗಿ ಮಾರ್ಪಡಿಸುತ್ತೇವೆ. ಉದ್ದ, ತೂಕ, ಕಾಲ ಮುಂತಾದುವನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಅಂಗುಲ, ಅಡಿ, ಗ್ರಾಂ, ಪೌಂಡು, ಸೆಕೆಂಡುಗಳು ಮುಂತಾದ ಮೂಲಮಾನಗಳನ್ನು ಆರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಒಂದು ಕೋಲಿನ ಉದ್ದ ಮೂರು ಅಡಿಯಾದರೆ ಒಂದು ಅಡಿಯ ಮೂರರಷ್ಟು ಅದರ ಉದ್ದವಿದೆ ಎಂದು ಅರ್ಥ. ಒಂದು ಇಂಚುಪಟ್ಟಿಯ (scale) ಉದ್ದ ಒಂದು ಅಡಿ ಇದ್ದರೆ, ಈ ಇಂಚುಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಮೂರು ಸಾರಿ ಹಾಕಿದಾಗ ಆ ಕೋಲಿನ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗುವುದು. ಮತ್ತೊಂದು ಕೋಲಿನ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆಯುವಾಗ ಅದರ ಉದ್ದ 3 ಅಡಿಗೆ ಹೆಚ್ಚು ನಾಲ್ಕು ಅಡಿಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಮೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. $3\frac{2}{3}$ ಅಥವಾ $\frac{11}{3}$ ಅಡಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, 1 ಅಡಿಯನ್ನು ಈಗ 3 ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ. 1 ಅಡಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉಪಭಾಗದ ಉದ್ದ $\frac{1}{3}$ ಅಡಿಯಾಗುವುದು.

ಇಂಥ ಎಷ್ಟು ಉಪಭಾಗಗಳು ಆ ಕೋಲಿನ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮನೆಂದು ಈಗ ನೋಡಿದರೆ, ಈ ಉಪಭಾಗದ ಹನ್ನೊಂದರಷ್ಟು ಆ ಕೋಲಿನ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗುವುದರಿಂದ, ಕೋಲಿನ ಉದ್ದ $11 \cdot \frac{1}{3}$ ಅಥವಾ $\frac{11}{3}$ ಅಡಿ ಅಥವಾ $3\frac{2}{3}$ ಅಡಿಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ ಒಂದು ಕೋಲಿನ ಉದ್ದ p ಅಡಿಗಳಿಗೂ $p+1$ ಅಡಿಗಳಿಗೂ ನಡುವೆ ಇದ್ದರೆ, 1 ಅಡಿ ಮೂಲಮಾನವನ್ನು n ಸಮವಾದ ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉಪಭಾಗದ ಉದ್ದ $\frac{1}{n}$ ಅಡಿ. ಈಗ ಈ ತರಹದ ಎಷ್ಟು ಉಪಭಾಗಗಳು ಕೋಲಿನ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮನೆಂದು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. ಇಂಥ m ಉಪಭಾಗಗಳ ಉದ್ದ ಕೋಲಿನ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, ಕೋಲಿನ ಉದ್ದ $m \cdot \frac{1}{n}$ ಅಥವಾ $\frac{m}{n}$ ಅಡಿಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{m}{n}$ ಎಂಬ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗೂ ಅಳತೆಗೂ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಿ, $\frac{m}{n}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ವತಂತ್ರವಾದ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಲು ಆರಂಭಿಸಿದರು.

m ಮತ್ತು n ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದರೆ, $\frac{m}{n}$ $(n \neq 0)$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಥವಾ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ (rational number) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ($\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$ ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು). ಈ ಪರಿಮೇಯಸಂಖ್ಯೆಯ ಭಾವನೆ ಉದಯಿಸಿದ ಅನಂತರ ಇವುಗಳ ಸಮತೆಯ ಅರ್ಥವನ್ನೂ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನ ಗುಣನ ಮುಂತಾದ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನವನ್ನೂ ಮಾಡಬೇಕಾಗುವುದು. ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಉಪಯೋಗದ ಪ್ರಭಾವದಿಂದ ಈ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೂ ಈ ಕ್ರಿಯೆಗಳೂ ಅವುಗಳು ಪಾಲಿಸುವ ನಿಯಮಗಳೂ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ತಮ್ಮದೇ ಆದ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

$\frac{a}{a}=1$, $ad=bc$ ಆದರೆ $a=\frac{c}{d}$

($\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ ಆದುದರಿಂದ)

ಈಗ $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 = 24$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad \times bc}{bd}; \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

$\frac{a}{b}$ ಮತ್ತು $\frac{c}{d}$ ಎರಡು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯವಾಗುವಂತೆ ಸಮತೆಯನ್ನೂ ಸಂಕಲನ ಗುಣನ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನೂ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಿದರೆ, ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸರಿಹೋಗುತ್ತಿದ್ದ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವ್ಯತ್ಯಯ ನಿಯಮ ನಿರಪೇಕ್ಷ ಸಂಯೋಗ ನಿಯಮ, ವಿತರಣ ನಿಯಮ ಮುಂತಾದ ನಿಯಮಗಳೆಲ್ಲವೂ ಈ ವಿಸ್ತೃತ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಮೂಹಕ್ಕೂ ಸರಿಹೋಗುವುದು.

p, q, r ಗಳು $\frac{m}{n}$ ರೂಪದ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ

$$p+q=q+p$$
$$p+(q+r)=(p+q)+r$$
$$pq=qp$$
$$p(qr)=(pq)r$$
$$p(q+r)=pq+pr$$ ಆಗುವುವು

$p=\frac{a}{b}$, $q=\frac{c}{d}$, $r=\frac{e}{f}$ ಆದರೆ, ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣನಗಳಿಗೆ ಅರ್ಥಕೊಟ್ಟಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ, ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಹಾಗೆ ಮಾಡುವಾಗ a, b, c, d, e, f ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೆಂದೂ, ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುವವು ಎಂಬುದನ್ನೂ ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ

ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಎಂದರೆ ಉದಾಹರಣೆಗೆ $p=\frac{3}{4}$, $q=\frac{5}{6}$, $r=\frac{1}{2}$ ಆದಾಗ ಈ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿ.

ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಿಗೆ ಅಥವಾ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣನಗಳ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ಮಾಡಬಹುದಾಗಿತ್ತು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ ಆಗುವಂತೆ ಸಂಕಲನದ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+1}{2+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ಆಗುವುದು. ಆದರೆ ಆಗ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಅಳತೆ ಮುಂತಾದ ಕೆಲಸಗಳಿಗೆ ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ.

ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಂಪಿಗೆ ಸೇರಿಸಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭಾವನೆಯನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸುವ ಕ್ರಮ ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ವ್ಯವಕಲನ ಮತ್ತು ಭಾಗಹಾರಗಳನ್ನು ಅನಿರ್ಬಂಧಿತವಾಗಿ ಮಾಡುವ ಆವಶ್ಯಕತೆಯಿಂದ ಅನಿವಾರ್ಯವಾಯಿತು. ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವೂ ಮತ್ತೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟಂತೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯ ಪರಿಪೂರ್ಣವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಆದರೆ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಭಾವನೆ ಇಲ್ಲದೆ ಹೋದರೆ ಯಾವ ಪೂರ್ಣಾಂಕದಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಮತ್ತೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಕಳೆಯಲು ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಅಥವಾ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭಾವನೆ ಇಲ್ಲದೆ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕದಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದು ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

a ಮತ್ತು b ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, b ಯು a ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ b ಮತ್ತು a ಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಅರ್ಥವಿರುವುದು, ಅಥವಾ $b-a$ ಎಂಬುದೂ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವೇ ಆಗಿರುವುದು ಋಣ

ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಭಾವನೆ ರೂಪಿತವಾದ ಮೇಲೆ ಯಾವ ಪೂರ್ಣಾಂಕದಿಂದ ಯಾವ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನಾದರೂ ಕಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು.

3ಕ್ಕೆ 2ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ 5ಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗುವುದರಿಂದ ($3+2=5$), $5-3=2$ ಮತ್ತು ಐದು ಮೂರಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚೆಂದೂ ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. a, b, c ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ $b=c+a$ ಆದರೆ, c ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕ $b-a$ ಗೆ (b ಮತ್ತು a ಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ) ಸಮನೆಂದು ವ್ಯವಕಲನದ ಅರ್ಥ ನಿರೂಪಣೆ. $b>a$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ $b-a$ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಅರ್ಥವಿರುವುದು.

$5-3$ ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 2 ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಸಮ. ಆದರೆ ಮೂರಲ್ಲಿ ಐದನ್ನು ಕಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ

$$a+c=b \text{ ಆದಾಗ } c=b-a$$

ಆದ್ದರಿಂದ a, b ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿದ್ದು x ಎಂಬುದು ಅವ್ಯಕ್ತವಾದ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದ್ದರೆ $a+x=b$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸರಿಹೋಗುವ ಬೆಲೆ $x=b-a$ ಆಗುವುದು. ಈಗ b ಯು a ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರಬೇಕೆಂಬ ನಿರ್ಬಂಧವನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಬೇಕಾದರೆ, ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ರೂಪಿತವಾಗಬೇಕು. $a-a=0$ ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಟ್ಟು 0 ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಂಪಿಗೆ ಸೇರಿಸಿದ್ದು ಒಂದು ಮಹತ್ವಪೂರಿತವಾದ ಹೆಜ್ಜೆ. $b<a$

$$b-a=-(a-b)$$

ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಟ್ಟು, -1, -2, -3, ... ಮುಂತಾದ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಭಾವನೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿದ ಮೇಲೆ, ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೇಲೆ ಅನಿರ್ಬಂಧಿತವಾಗಿ ವ್ಯವಕಲನ ಮಾಡುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು.

ಉದಾಹರಣೆ: $3-5=-(5-3)=-2$

ಈಗ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೆಂದು ಕರೆಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ a, b ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದರೆ,

$b>a$ ಆದಾಗ $b-a$ ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ $(5-3=+2)$

$b=a$ ಆದಾಗ $b-a=a-a=0$

$b<a$ ಆದಾಗ $b-a$ ಒಂದು ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕ $(3-5=-2)$

ಈಗ a ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೆ, $x+a=0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸರಿಹೋಗುವ x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದೇ ಇರುವುದು. $x+1=0$ ಆದರೆ $x=-1$. ಏಕೆಂದರೆ $(-1)+1=1-1=0$. ಹೀಗೆಯೇ $x=-2$, $x+2=0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸರಿಹೋಗುವ ಬೆಲೆ.

ಹೀಗೆ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಂಪಿಗೆ ಶೂನ್ಯವನ್ನೂ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನೂ ಸೇರಿಸಿದ ಮೇಲೆ, ಈ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ ಮಾಡುವ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಬೇಕಾಗುವುದು. ಹೀಗೆ ಮಾಡುವಾಗ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಥವಾ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಂಪಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಸಂಕಲನ, ಗುಣನಗಳ ವ್ಯತ್ಯಯ ನಿಯಮ ನಿರಪೇಕ್ಷ ಸಂಯೋಗ ನಿಯಮ ಮುಂತಾದ ನಿಯಮಗಳು ವಿಸ್ತರಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಈ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಮೂಹಕ್ಕೂ ಅನ್ವಯಿಸುವಂತೆ ಸಂಕಲನ, ಗುಣನ ಮುಂತಾದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಣೆ ಮಾಡಬೇಕಾದುದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು + ಎಂಬ ಗುರುತಿನಿಂದಲೂ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು − ಎಂಬ ಗುರುತಿನಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸಿದರೆ

$$(-1)(-1)=+1$$

ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಡಬೇಕಾಗುವುದು. ವಿತರಣ ನಿಯಮ ಈ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸರಿಹೋಗಬೇಕಾದರೆ $(-1)\times(-1)$ ಈ ಗುಣ ಲಬ್ಧ $+1$ ಕ್ಕೆ ಸಮನೆಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ ಮಾಡಬೇಕು.

$(-1)(-1)=-1$ ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ

$a(b+c)=ab+ac$ ಎಂಬ ವಿತರಣ ನಿಯಮ ಈ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಮೂಹಕ್ಕೆ ಸರಿಹೋಗುವುದಿಲ್ಲ.

$a=-1, b=1, c=-1$ ಆದಾಗ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ಸಮೀಕರಣ $-1(1-1)=-1\cdot1+(-1)(-1)$ ರೂಪವನ್ನು ತಾಳುವುದು $-1\cdot0=-1-1$ $[\because(-1)(-1)=-1]$
$\therefore 0=-2$ ಎಂಬುದು ನಿಜವಾಗಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ

$(-1)(-1)=+1$ ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ,

$$-1(1-1)=-1\cdot1+(-1)(-1)$$
$$-1\cdot0=-1+1$$
$$0=0$$

ಒಂದು ಸುಸಂಬದ್ಧವಾದ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಮೂಹದ ಸೃಷ್ಟಿಗೋಸ್ಕರ

$$(-1)(-1)=+1$$

ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ ಮಾಡಿದೆ. ಇದೊಂದು ಸಂಕೇತ. ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಈಗ a, b, c ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದರೆ (ಧನ, ಋಣ ಅಥವಾ 0), ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸರಿಹೋಗುತ್ತಿದ್ದ ಸಂಕಲನ, ಗುಣನಗಳ ಎಲ್ಲ ನಿಯಮಗಳೂ, ಈ ವಿಸ್ತೃತ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಮುಚ್ಚಯಕ್ಕೆ ಸರಿಹೋಗುವುದು.

$$a+b=b+a$$
$$(a+b)+c=a+(b+c)$$
$$ab=ba$$
$$(ab)c=a(bc)$$
$$a(b+c)=ab+ac$$

ವ್ಯವಕಲನವನ್ನು ಅನಿರ್ಬಂಧಿತವಾಗಿ ಮಾಡಲು ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆಯ ಆವಶ್ಯಕತೆ ಹೇಗೆ ಉಂಟಾಯಿತೋ,

ಹಾಗೆಯೇ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕದಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಅನಿರ್ಬಂಧಿತವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು ಅವಶ್ಯಕವಾಗುತ್ತವೆ. a ಮತ್ತು b ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದರೆ ಇವುಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧ $\frac{b}{a}$ ಎಂಬುದು $ax=b$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸರಿಹೋಗುವ x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ವ್ಯವಕಲನಕ್ಕೆ ಸಂಕಲನದ ಮೂಲಕ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಹಾಗೆ ಭಾಗಹಾರಕ್ಕೆ ಗುಣನದ ಮೂಲಕ ಅರ್ಥ ಕೊಡುತ್ತೇವೆ a ಯನ್ನು x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ b ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಬಂದರೆ, ಆಗ $x=\frac{b}{a}$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $\frac{12}{4}$ ಎಂಬುದು ಎಂಥ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ನೋಡಬೇಕಾದರೆ 4 ನ್ನು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ 12 ಆಗುವುದೆಂದು ನೋಡಬೇಕು. ಅರ್ಥಾತ್ $4 \cdot x=12$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸರಿಹೋಗುವ x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. 12 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದರಿಂದ, ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ x ಎಂಬುದು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ. $4=3\times 12$ ಆದ್ದರಿಂದ $x=3$.

$5x=12$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸರಿಹೋಗುವ ಬೆಲೆ ನಮ್ಮ ಪರಿಭಾಷೆಯ ಪ್ರಕಾರ $x=\frac{12}{5}$. ಹನ್ನೆರಡು ಐದರಿಂದ ಭಾಗವಾಗದೇ ಇರುವುದರಿಂದ ಇದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಲ್ಲ

a ಮತ್ತು b ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದರೆ $ax=b$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸರಿಹೋಗುವ x ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $\frac{b}{a}$ ಎಂದು ಕರೆದು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಂಪಿಗೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನೂ ಸೇರಿಸಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿದ ಮೇಲೆ ಈ ವಿಸ್ತೃತ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಮೂಹದಲ್ಲಿ ಭಾಗಹಾರವನ್ನು ಅನಿರ್ಬಂಧಿತವಾಗಿ ಮಾಡುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು.

ಆದರೆ $ax=b$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $a=0$ ಆಗಬಾರದು.

$0\times x=0$ ಆದ್ದರಿಂದ, 0 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೂ b ಎಂಬ ಮತ್ತೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬರುವುದಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{b}{a}$ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲಿ $a=0$ ಆಗಬಾರದು. ಆದರೆ, ಛೇದ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋದ ಹಾಗೆಲ್ಲ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಬೆಲೆ ಹೆಚ್ಚು ವುದರಿಂದ $\frac{b}{0}=\infty$ ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಡುವುದು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕೆ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

[ಉದಾ : $\frac{2}{1}=2$, $\frac{2}{.1}=20$, $\frac{2}{.01}=200$ ಇತ್ಯಾದಿ $\frac{2}{0}=\infty$]

$ax=b$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ a ಮತ್ತು b ಎರಡೂ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮನಾದಾಗ ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸರಿಹೋಗುವ x ಎಂಬ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇರಲಾರದು. $0\cdot x=0$ ಆದರೆ x ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ ಆಗ ಬಹುದು.

ಉದಾ : $0\cdot 1=0$, $0\cdot 2=0$

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{b}{a}=\frac{0}{0}$ ಇದರ ಬೆಲೆ ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ (indeterminate).

a ಮತ್ತು b ಎರಡೂ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದಾಗ $\frac{b}{a}$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಧನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ. a ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದ್ದು b ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೆ $\frac{b}{a}$ ಒಂದು ಋಣ ಭಿನ್ನರಾಶಿ. ($-\frac{3}{5}$, $-\frac{3}{4}$ ಇತ್ಯಾದಿ)

$\frac{b}{a}$ ಎಂಬ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲಿ $a=1$ ಆಗಿದ್ದು, b ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೆ $\frac{b}{a}=\frac{b}{1}=b$ $\left(\frac{3}{1}=3, \frac{-5}{1}=-5\right)$. ಹೀಗೆ ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನೂ $\frac{b}{a}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು, ಸೊನ್ನೆ, ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ $\frac{b}{a}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದರಿಂದ, ಇವುಗಳನ್ನೂ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದೇ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ ಈ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣನ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಯ ನಿಯಮವನ್ನೂ ನಿರಪೇಕ್ಷ ಸಂಯೋಗ ನಿಯಮವನ್ನೂ ಪಾಲಿಸುವುವು. ವಿತರಣ ನಿಯಮವನ್ನೂ ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ.

ಈ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಮುಚ್ಚಯದಲ್ಲಿ $a+x=b$

$$ax=b \quad (a\neq 0)$$

ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಸರಿಹೋಗುವ x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಇಂಥ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಮುಚ್ಚಯವನ್ನು ಒಂದು ಕ್ಷೇತ್ರ (field) ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಒಂದು ಸಂಕುಚಿತವಾದ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಮೂಹಕ್ಕೆ ಸರಿಹೋಗುವ ನಿಯಮಗಳು, ವಿಸ್ತೃತ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಮೂಹಕ್ಕೂ ಅನ್ವಯಿಸುವಂತೆ ಆ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಮೂಹವನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸುವುದು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ವ್ಯಾಪಕೀಕರಣ (generalisation) ಎಂಬ ಕ್ರಮದ ಒಂದು ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯ. ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಥವಾ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಂಕುಚಿತವಾದ ಸಮೂಹದಿಂದ, ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಸ್ತೃತ ಕ್ಷೇತ್ರವನ್ನು ಪಡೆಯುವುದರಿಂದ ವ್ಯವಕಲನ, ಭಾಗಹಾರಗಳನ್ನು ಅನಿರ್ಬಂಧಿತವಾಗಿ ಮಾಡಲು ಅನುಕೂಲವಾದದ್ದೇ ಅಲ್ಲದೆ, ಅಳತೆಗಳಿಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಅವಕಾಶ ಮಾಡಿಕೊಟ್ಟಂತೆಯೂ ಆಯಿತು. ಈ ಎರಡು ಉದ್ದೇಶಗಳು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸೃಷ್ಟಿಗೆ ಸಾಫಲ್ಯವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿವೆ.

ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು : ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ನಿರೂಪಣೆ

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ l ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ 0 ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದೆ. ಈ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ 0 ಬಿಂದುವಿನ ಬಲಗಡೆ

u_1 ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದೆ. Ou_1 ಉದ್ದವನ್ನು ಮೂಲಮಾನವಾಗಿ ಆರಿಸಿದರೆ $Ou_1 = 1$.

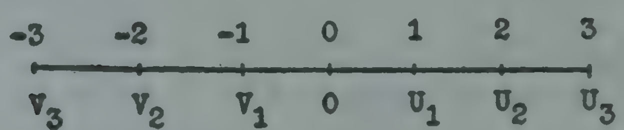
ಈಗ O ಬಿಂದುವಿನ ಬಲಗಡೆ ಸಮರೂಪದಲ್ಲಿ u_1, u_2, u_3 .... ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದರೆ, $Ou_1 = u_1 u_2 = u_2 u_3 = ... = 1$ ಆದ್ದರಿಂದ $Ou_1 = 1$, $Ou_2 = 2$, $Ou_3 = 3$, ... ಆಗುತ್ತದೆ. u_1, u_2, u_3 .... ಮುಂತಾದ ಬಿಂದುಗಳು O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ 1, 2, 3, ... ಮೂಲಮಾನಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿವೆ. ಹೀಗೆಯೇ O ಬಿಂದುವಿನ ಎಡಗಡೆ l ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ 1, 2 3, ... ದೂರಗಳಲ್ಲಿರುವ v_1, v_2, v_3 .... ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸೋಣ.

ಈಗ u_1, u_2, u_3 .... ಬಿಂದುಗಳು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದ

1, 2, 3, ... ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ

v_1, v_2, v_3 .... ಬಿಂದುಗಳು

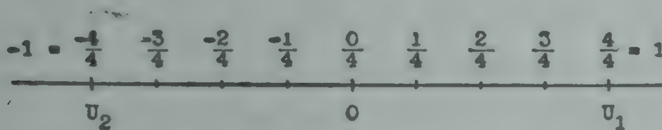
$-1, -2, -3,$ ... ಮುಂತಾದ ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನೂ O ಬಿಂದು ಶೂನ್ಯವನ್ನೂ (0) ಸೂಚಿಸುವುವು.



$\frac{m}{n}$ ಎಂಬ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು, ಒಂದು ಮೂಲಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವ $v_2 v_1$, $v_1 O$, $O u_1$, $u_1 u_2$ .... ಮುಂತಾದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಖಾ ಖಂಡವನ್ನೂ n ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿದರೆ, ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು, ಛೇದದಲ್ಲಿ n ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಿರುವ ಎಲ್ಲ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಹೀಗೆ ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳ ವಿಂಗಡಣೆಯನ್ನು n ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮೌಲ್ಯಕ್ಕೂ ಮಾಡಿದರೆ, ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳ ಮೇಲಿರುವ

ಬಿಂದುಗಳು ಎಲ್ಲ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ (ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ) ಗಳನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನೂ ನಾಲ್ಕು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ, ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳು ಛೇದದಲ್ಲಿ 4 ಇರುವ ಎಲ್ಲ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.



ಒಂದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಾನಾ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಯಾವ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬರೆದರೂ ಒಂದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.



$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ ಈ ಎರಡು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳೂ ಸಮ.

$\frac{3}{4}$ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು, Ou_1 ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ, O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಈ ತರಹ ಮೂರು ಭಾಗಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಸಿಕ್ಕುವ P ಬಿಂದು $\frac{3}{4}$ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

$\frac{6}{8}$ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು Ou_1 ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಂಟು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ, ಈ ತರಹದ ಆರು ಭಾಗಗಳನ್ನು O ಬಿಂದುವಿನ ಬಲಕ್ಕೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ ಅದೇ P ಬಿಂದುವಿಗೆ ಬರುತ್ತೇವೆ.

ಹೀಗೆಯೇ P ಎಂಬ ಒಂದೇ ಬಿಂದು $\frac{3}{4}$ಗೆ ಸಮನಾಗಿರುವ $\frac{6}{8}$, $\frac{12}{16}$ ಮುಂತಾದ ಎಲ್ಲ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ l ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದು ಇರುತ್ತದೆ. ಇಂಥ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪರಿಮೇಯ ಬಿಂದುಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ಅವು ಸೂಚಿಸುವ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಪರ್ಯಾಯ ಶಬ್ದಗಳನ್ನಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ a ಮತ್ತು b ಎರಡು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ a ಯು b ಗಿಂತ ಚಿಕ್ಕದು ಎಂದರೆ, a ಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದು b ಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಎಡಗಡೆ ಇದೆ ಎಂದರ್ಥ. $b-a$ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗಲೆಲ್ಲ b ಯು a ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅಥವಾ a ಯು b ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಎಂದು ಹೇಳಿದರೂ ಒಂದೇ. $a<b$ ಆದಾಗ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ a ಮತ್ತು b ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲ a ಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು, b ಗಿಂತ ಕಡಮೆ. ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ a ಮತ್ತು b ಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳೊಡನೆ ಅವುಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ಸೇರಿಸಿದರೆ ಬರುವ ರೇಖಾ ಖಂಡ ಒಂದು ಸಂವೃತ ಅಂತರಾಳವನ್ನು (closed interval) ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳುವೆವು. ಇದನ್ನು $[a, b]$ ಈ ಗುರುತಿನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿ $a \leq x \leq b$ ಆಗುವಂತೆ ಇರುವ ಎಲ್ಲ x ಎಂಬ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಇರುತ್ತವೆ.



ಉದಾಹರಣೆ :

1, 2 ಮತ್ತು 1, 2 ರ ನಡುವೆ ಇರುವ ಎಲ್ಲ ಪರಿಮೇಯ (ಎಂದರೆ 1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ 2 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆಯಾಗಿರುವ 1·1, 1·5, 1·99 ಮುಂತಾದ) ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ [1, 2] ಸಂವೃತ ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿರುವುವು.

ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (Irrational numbers)

l ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಎಷ್ಟೇ ಹತ್ತಿರವಿರುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಅವುಗಳ ನಡುವೆ ಅನಂತವಾದ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಡಗಿರುತ್ತವೆ.

1 ಮತ್ತು 2 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿ ಎರಡರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವುಗಳ ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಪದ (arithmetic mean) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದು 1 ಮತ್ತು 2 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸರಾಸರಿ. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮಾಂತರ ಮಧ್ಯಪದ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ.

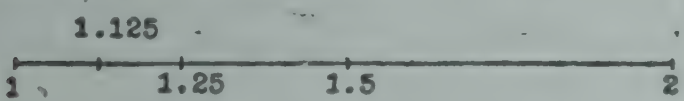
$$\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}=1\cdot5 \qquad 1<1\cdot5<2$$

ಈಗ 1 ಮತ್ತು 1·5 ಇವುಗಳ ಸರಾಸರಿ, ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವುದು. $\frac{1+1\cdot5}{2}=\frac{2\cdot5}{2}=1\cdot25\,;\quad 1<1\cdot25<1\cdot5$

1 ಮತ್ತು 1·25 ಇವುಗಳ ಮಧ್ಯ ಪದವಾದ

$$\frac{1+1\cdot25}{2}=\frac{2\cdot25}{2}=1\cdot125\,;\quad 1<1\cdot125<1\cdot25$$

ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವುದು.



ಹೀಗೆಯೇ 1 ಮತ್ತು 1·125 ಇವುಗಳ ಮಧ್ಯಪದ ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವುದು. ಈ ಕ್ರಮದಿಂದ 1 ಮತ್ತು 2ರ ನಡುವೆ ಅನಂತವಾದ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. 1 ಮತ್ತು 2ರ ಬದಲು, 1 ಮತ್ತು 1·125 ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದರೂ, ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆಯೂ ಅನಂತವಾದ

ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವುದೆಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯುವುದು ಸುಲಭ. l ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಎಷ್ಟೇ ಹತ್ತಿರ ಇರುವ ಎರಡು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಅವುಗಳ ನಡುವೆ ಅನಂತ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಎಂದರೆ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು l ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ನಿಬಿಡವಾಗಿ ಅಥವಾ ದಟ್ಟವಾಗಿ ನಿವೇಶಿತವಾಗಿವೆ (dense). ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಒಂದರ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಇಷ್ಟು ನಿಬಿಡವಾಗಿ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವುದರಿಂದ, ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳೂ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೇ ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುವುದು ತಪ್ಪಾಗುವುದು. ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸದೆ ಇರುವ ಅನೇಕ ಬಿಂದುಗಳು ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿವೆ. ಇದನ್ನು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೂಲಕ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ನಾಲ್ಕು ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದರಿಂದಲೇ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಹದಿನಾರಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗುವುದರಿಂದ, ಹದಿನಾರರ ವರ್ಗ ಮೂಲ ನಾಲ್ಕಕ್ಕೆ ಸಮನೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. $4^2 = 4 \times 4 = 16 \quad \therefore \sqrt{16} = 4.$

1, 2, 3, 4, 5, ... ಮುಂತಾದ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವರ್ಗಮೂಲವೂ ಮತ್ತೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

1, 4, 9, 16, 25, ... ಮುಂತಾದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವರ್ಗ ಮೂಲಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 1, 2, 3, 4, 5, ... ಮುಂತಾದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$\sqrt{1} = 1, \ \sqrt{4} = 2, \ \sqrt{9} = 3, \ \sqrt{16} = 4,$ .... ಆದರೆ, 2, 3, 5, ಮುಂತಾದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೂ ಮತ್ತೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು ಯಾವ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಾದರೂ ಸಮನಾಗಿರುವುದೇ ಎಂದು ವಿಚಾರಮಾಡಬೇಕು.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ಮುಂತಾದುವುಗಳ ಬೆಲೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಆಗಿರುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\sqrt{2}$ ರ ಬೆಲೆ ಯಾವ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಸಮನಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೆಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಸಾಧನೆ: ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ $\sqrt{2}$ ರ ಬೆಲೆ $\frac{m}{n}$ ಎಂಬ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮನಾಗಿರಲಿ. $\frac{m}{n}$ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಅದರ ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಎಂದರೆ m ಮತ್ತು n ಈ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಇಲ್ಲ ಎಂದು ಹೇಳಿದಂತಾಯಿತು. ಎಂದರೆ m ಮತ್ತು n ಎರಡೂ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಎರಡೂ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ m ಮತ್ತು n ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೂ 2 ರಿಂದು ಭಾಗವಾಗುವುವು $\frac{m}{n}$ ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ (1) n ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು, m ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ (2) n ಮತ್ತು m ಎರಡೂ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಬಹುದು.

ಈಗ $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

$\therefore (\sqrt{2})^2 = \frac{m}{n}$

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \text{ ಅಥವಾ } m^2 = 2n^2$$

(1) ಮೊದಲನೇ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ m ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದುದರಿಂದ, m^2 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವುದು. ಆದರೆ n ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ. ಆದ್ದರಿಂದ n^2 ಎಂಬುದೂ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ. ಈಗ $2n^2$, ಎರಡರಿಂದ ಭಾಗವಾಗಬಹುದೇ ವಿನಾ 4 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗಲಾರದು.

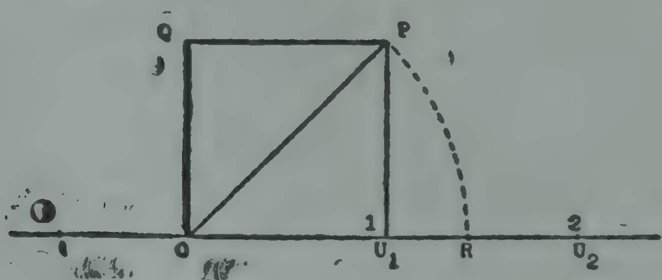
$$\therefore\ m^2 \neq 2n^2 \text{ ಆದ್ದರಿಂದ } \sqrt{2} \neq \frac{m}{n}$$

(2) ಎರಡನೆಯ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ m ಮತ್ತು n ಎರಡೂ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ m^2 ಮತ್ತು n^2 ಎರಡೂ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಈಗ $2n^2$ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು m^2 ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ.

$$\therefore\ m^2 \neq 2n^2 \qquad \therefore\ \sqrt{2} \neq \frac{m}{n}$$

ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮನಾಗಿಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಹೀಗೆಯೇ $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ಮುಂತಾದುವು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಮನಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೆಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.



ಈಗ l ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ, OU_1 ರೇಖಾಖಂಡ ಒಂದು ಮೂಲಮಾನಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, $OU_1 = 1$. $OU_2 = 2$. ಈಗ OU_1 ರೇಖಾಖಂಡದ ಮೇಲೆ OU_1 PQ ವರ್ಗಾಕೃತಿಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿದೆ. l ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $OR = OP$ ಆಗುವಂತೆ R ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದೆ.

OU_1PQ ವರ್ಗಾಕೃತಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾಹುವೂ ಒಂದು ಮೂಲಮಾನಕ್ಕೆ ಸಮ. $OU_1=1$, $PU_1=1$.

$\angle OU_1P=90^\circ$. OU_1P ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾದ್ದರಿಂದ

$OP^2=OU_1^2+U_1P^2=1^2+1^2=1+1=2$

[ಪೈಥಾಗೊರಾಸನ ಪ್ರಮೇಯ]

$OP^2=2 \quad \therefore \quad OP=\sqrt{2}$

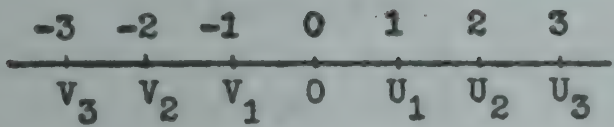
$OR=OP$ ಆದ್ದರಿಂದ $OR=\sqrt{2}$.

l ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ, O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಉದ್ದಗಳುಳ್ಳ ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿದರೆ, ಈ ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ಉದ್ದಗಳು $\frac{m}{n}$ ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ, ಈ ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುಗಳು $\frac{m}{n}$ ರೂಪದ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ರೇಖಾಖಂಡದ ಉದ್ದಗಳು $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ಮುಂತಾದ ಉದ್ದಗಳಿಗೆ ಸಮನಾದಾಗ, ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುಗಳು ಯಾವ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $OR=\sqrt{2}$ ಆದ್ದರಿಂದ $R=\sqrt{2}$ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲವಾದುದರಿಂದಲೂ, R ಬಿಂದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ. l ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಬೇಕೆಂದು ನಾವು ಅಪೇಕ್ಷಿಸಿದರೆ, ಈಗ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಕರೆದು, ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಂಪಿಗೆ ಈ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಮುಚ್ಚಯವನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಬೇಕಾಗುವುದು. ಹೀಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸಿದಾಗ $OR=\sqrt{2}$. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ R ಬಿಂದು $\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. R ಬಿಂದುವಿನಂಥ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಅನೇಕ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು l ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮತ್ತು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಂಪನ್ನು ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮೂಹವೆಂದು (real number system) ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಹೀಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮೂಹವನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿದ ಮೇಲೆ, l ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಿಗೂ ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ (real numbers) ಏಕತಾಸಂಪತ್ತಿ (one to one correspondence) ಉಂಟಾಗುವುದು. ಎಂದರೆ l ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ಒಂದೊಂದು ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆ (ಪರಿಮೇಯ ಅಥವಾ ಅಪರಿಮೇಯ)ಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. ವಿಲೋಮವಾಗಿ ನಾವು ಯಾವ ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು l ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಐವತ್ತು ಮಂದಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರುವರೆಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಹುಡುಗರಿಗೆ ಹಿಂದಿನ ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಗಳಿಸಿರುವ ಅಂಕದ ಮೇಲೆ ರ್‍ಯಾಂಕುಗಳನ್ನು ಕೊಡೋಣ. ಆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕೂರುವ ಕೊಠಡಿಯಲ್ಲಿ ಐವತ್ತು ಕುರ್ಚಿಗಳನ್ನು ಹಾಕಿ, ಈ ಕುರ್ಚಿಗಳ ಮೇಲೆ 1, 2, 3, ... 50, ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸೋಣ. ಆಯಾ ರ್‍ಯಾಂಕಿನ ಹುಡುಗ ಆಯಾ ನಂಬರಿನ ಕುರ್ಚಿಯ ಮೇಲೆ ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದು ನಿಯಮಿಸಿದರೆ, ತರಗತಿಯಲ್ಲಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೂ ಕೊಠಡಿಯಲ್ಲಿರುವ ಕುರ್ಚಿಗಳಿಗೂ ಏಕತಾಸಂಪತ್ತಿಯನ್ನು (one to one correspondence) ಕಲ್ಪಿಸಿದಂತಾಯಿತು. ಎಂದರೆ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಹುಡುಗನೂ ಕೂರಲು ಕೊಠಡಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಕುರ್ಚಿ ಇದೆ. ಕೊಠಡಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕುರ್ಚಿಯ ಮೇಲೆಯೂ ಕೂರುವ ಒಬ್ಬ ಏಕೈಕ (unique) ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತಾನೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 8ನೇ ರ್‍ಯಾಂಕ್ ಹುಡುಗ 8ನೇ ನಂಬರ್ ಕುರ್ಚಿಯ ಮೇಲೆ ಕೂರುತ್ತಾನೆ. 11ನೇ ನಂಬರಿನ ಕುರ್ಚಿಯ ಮೇಲೆ 11ನೇ ರ್‍ಯಾಂಕ್ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಕೂರುವನು. ಇದು ಏಕತಾಸಂಪತ್ತಿಯ ಕಲ್ಪನೆಗೆ ಒಂದು ನಿದರ್ಶನ.

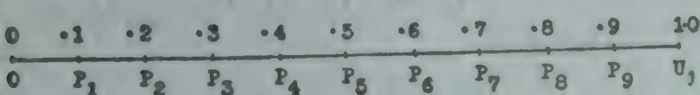
ದಶಮಾಂಶಗಳು



l ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ O ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನೂ $Ou_1=1$ ಎಂಬ ಮೂಲಮಾನವನ್ನೂ ಆರಿಸಿ O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎರಡು ಕಡೆಗೂ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿರುವ u_1, v_1; u_1, v_2; u_3, v_3; .... ಮುಂತಾದ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದಾಗ, u_1, u_2, u_3, ... ಬಿಂದುಗಳು 1, 2, 3, ... ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನೂ, v_1, v_2, v_3, ... $-1, -2, -3$, ... ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

ಈಗ ಒಂದು ಮೂಲಮಾನ ಉದ್ದವಿರುವ Ou_1, u_1u_2, u_2u_3,.... Ov_1, v_1v_2, v_2v_3, ... ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂತರಾಳವನ್ನೂ 10, 100, 1000, ... ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತ ಹೋದರೆ, ಈ ವಿಭಜನೆಯ ಮೂಲಕ *l* ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿದ ಬಿಂದುಗಳು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೇ ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ (ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಅಥವಾ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು).

ಮುಂದೆ ಬರೆದಿರುವ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಬಹಳ ದೊಡ್ಡದು ಮಾಡಿ ತೋರಿಸಿದೆ (ಅರ್ಥವಾಗುವುದಕ್ಕೋಸ್ಕರ).



$Ou_1=1$ ಈ ಅಂತರಾಳವನ್ನು [0, 1] ಹತ್ತು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು OP_1, P_1P_2 ರಂಥ ಉಪಭಾಗಗಳ ಉದ್ದ ·1 ಅಥವಾ $\frac{1}{10}$ ಕ್ಕೆ ಸಮ.

Ou_1 ಅಂತರಾಳವನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವ

$$O, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, u_1$$

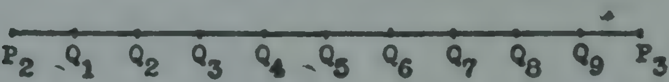
ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

$$\tfrac{0}{10}=0,\ \tfrac{1}{10},\ \tfrac{2}{10},\ \tfrac{3}{10},\ \tfrac{4}{10},\ \tfrac{5}{10},\ \tfrac{6}{10},\ \tfrac{7}{10},\ \tfrac{8}{10},\ \tfrac{9}{10},\ \tfrac{10}{10}=1$$

$$0,\ \cdot1,\ \cdot2,\ \cdot3,\ \cdot4,\ \cdot5,\ \cdot6,\ \cdot7,\ \cdot8,\ \cdot9,\ 1$$

ಈ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸುವ ಹತ್ತು ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾದ $P_2 P_3$ ರೇಖಾ ಖಂಡವನ್ನು ಆರಿಸೋಣ. ಇದು ಸೂಚಿಸುವ ಅಂತರಾಳ $[\cdot2, \cdot3]$ ಎಂದರೆ ಈ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮೇಲೆ $\cdot2$, $\cdot3$ ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲ ಇರುತ್ತವೆ. $P_2 P_3$ ರೇಖಾಖಂಡದ ಉದ್ದ $\frac{1}{10}$. ಇದನ್ನು ಪುನಃ ಹತ್ತು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉಪಭಾಗದ ಉದ್ದವೂ $\frac{1}{100}$ ಅಥವಾ $\cdot01$ ಆಗುವುದು.



$$\cdot2=\frac{20}{100}, \frac{21}{100}, \frac{22}{100}, \frac{23}{100}, \frac{24}{100}, \frac{25}{100},$$
$$\frac{26}{100}, \frac{27}{100}, \frac{28}{100}, \frac{29}{100}, \frac{30}{100}=\cdot3$$

ಅಥವಾ

$$\cdot20, \cdot21, \cdot22, \cdot23, \cdot24, \cdot25, \cdot26, \cdot27, \cdot28, \cdot29, \cdot30$$

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $P_2, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8, Q_9, P_3$ ಬಿಂದುಗಳು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

P_2 ಬಿಂದು $\cdot2$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು $P_2 Q_1=\frac{1}{100}=\cdot01$ ಆದ್ದರಿಂದ, Q_1 ಬಿಂದು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆ

$$=\frac{2}{10}+\frac{1}{100}=\frac{20}{100}+\frac{1}{100}=\frac{21}{100}=\cdot21$$

ಈಗ P_2 P_3 ರೇಖಾಖಂಡದ ಪ್ರತಿ ಉಪಭಾಗವನ್ನೂ ಪುನಃ ಹತ್ತು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಬಹುದು.

ಹೀಗೆಯೇ l ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಖಾಖಂಡದ ಭಾಗಗಳನ್ನೂ ಉಪಭಾಗಗಳನ್ನೂ ಪುನಃ ಪುನಃ ಹತ್ತು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸುತ್ತ ಹೋದರೆ, ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿದ ಬಿಂದುಗಳು ದಶಮಾಂಶ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುವು. ಇವೆಲ್ಲವೂ

$$Z \cdot a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$$

ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ Z ಎಂಬುದು ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ, ಸೊನ್ನೆ ಅಥವಾ ಒಂದು ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರುವುದು. $a_1, a_2, \cdots a_n$ ಗಳ ಬೆಲೆ 0, 1, 2, ..., 9 ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು. 2·312 ಎಂಬ ಭಿನ್ನರಾಶಿ [2, 3] ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿರುವುದು. ಇದನ್ನು ಪುನಃ ಹತ್ತು ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿದಾಗ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದು [2·3, 2·4] ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿ ಬೀಳುತ್ತದೆ. ಈ ಅಂತರಾಳವನ್ನು ಪುನಃ ಹತ್ತು ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿದರೆ, ಈ ಸಂಖ್ಯೆ [2·31, 2·32] ಈ ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿರುವುದು. ಈ ಅಂತರಾಳವನ್ನು ಪುನಃ ಹತ್ತು ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ, [2·312, 2·313] ಅಂತರಾಳದ ಮೊದಲನೇ ಬಿಂದುವೇ 2·312 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಈ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು $\frac{m}{n}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯ

$$2\cdot312=2+\frac{3}{10}+\frac{1}{100}+\frac{2}{1000}$$
$$=\frac{2000}{1000}+\frac{300}{1000}+\frac{10}{1000}+\frac{2}{1000}=\frac{2312}{1000}$$

ಆದರೆ ಕೆಲವು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇಂಥ ಅಂತರಾಳದ ಆದಿಬಿಂದುವಾಗಲೀ ಅಂತ್ಯಬಿಂದುವಾಗಲೀ ಆಗಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\frac{1}{3}$. ಇದರ ಛೇದದಲ್ಲಿರುವ 3, 10ನ್ನಾಗಲಿ, 10ರ

ಘಾತಗಳಾದ 100, 1000, ... ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನಾಗಲೀ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

$\frac{1}{3}$ ಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು P ಬಿಂದು [0, 1] ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಇದೆ. ಈ ಅಂತರಾಳವನ್ನು ಹತ್ತು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ P ಬಿಂದು .3 ಮತ್ತು .4ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಈಗ [.3, 4] ಅಂತರಾಳವನ್ನು ಹತ್ತು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿದರೆ, ಈ ಅಂತರಾಳದ ಉಪಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ .31, .32, .33, .34 .... ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಈಗ P ಬಿಂದು [.33, .34] ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿ ಬೀಳುವುದು. ಈ ಅಂತರಾಳದ ಉದ್ದ $\frac{1}{100}$. ಇದನ್ನು ಪುನಃ ಹತ್ತು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ P ಬಿಂದು [.333, .334] ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿ ಬೀಳುತ್ತದೆ. ಈ ಅಂತರಾಳದ ಉದ್ದ $\frac{1}{1000}$.

ಹೀಗೆ P ಬಿಂದು ಯಾವ ಅಂತರಾಳದ ಆದಿಬಿಂದುವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದಿದ್ದರೂ, ಹತ್ತಿರ ಹತ್ತಿರವಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವೆ P ಬಿಂದುವನ್ನು ಅಂತರ್ಗತವಾಗುವ ಹಾಗೆ ಮಾಡಬಹುದು. P ಬಿಂದು ಯಾವಾಗಲೂ .33 .... 33 ಮತ್ತು .33 .... 34 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆಯೇ ಇರುವುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ .3333 .... ಎಂಬ ಅಪರಿಮಿತ ಸ್ಥಾನಗಳುಳ್ಳ ದಶಮಾಂಶ ಭಿನ್ನರಾಶಿ $\frac{1}{3}$ ಎಂಬ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. .3333 .... ಈ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲಿ 3 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಪುನಃ ಪುನಃ ಬರುತ್ತಿದೆ, ಆವರ್ತಿಸುತ್ತಿದೆ. ಇದನ್ನು ಆವರ್ತದಶಮಾಂಶ (periodic decimal) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ 2.312 ಇದು ಒಂದು ಪರಿಮಿತ ಸ್ಥಾನಗಳುಳ್ಳ ದಶಮಾಂಶ ಭಿನ್ನರಾಶಿ.

$\frac{1}{3}$ = .333 .... ಇದು ಅಪರಿಮಿತ ಸ್ಥಾನಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಆವರ್ತ ದಶಮಾಂಶ ಭಿನ್ನರಾಶಿ.

ಪರಿಮಿತ ಸ್ಥಾನಗಳುಳ್ಳ ದಶಮಾಂಶ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು ಒಂದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಆವರ್ತ ದಶಮಾಂಶ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳೂ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೇ ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು

$$\frac{2312}{1000} = 2.312$$

ಇದನ್ನು 2.312000000 .... ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ, ಇಲ್ಲ 0 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಆವರ್ತವಾಗುವುದರಿಂದ, ಇದೂ ಒಂದು ಆವರ್ತದಶಮಾಂಶವೇ. $\frac{1}{3} = .333 ....$ ಇದು ಒಂದು ಆವರ್ತ ದಶಮಾಂಶ. ಈ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ನೋಡಿದರೆ, ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಆವರ್ತದಶಮಾಂಶಗಳೇ ಆಗುವುವು.

$a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$ ಇದನ್ನು ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿ (geometric progression) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ಮೊದಲನೇ ಪದ a. ಇದನ್ನು r ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಮುಂದಿನ ಪದ $a\,r$ ದೊರಕುವುದು. $a\,r$ ನ್ನು r ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅದರ ಮುಂದಿನ ಪದ ar^2 ದೊರಕುವುದು. ಹೀಗೆಯೇ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. r ಬೆಲೆ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದ್ದಾಗ $(0 < r < 1)$ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಅನಂತ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ $\frac{a}{r-1}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶದ ಸಹಾಯದಿಂದ, ಆವರ್ತದಶಮಾಂಶಗಳು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೇ ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

$$\cdot 333 \ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$$

ಇದು ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿ. ಇದರ ಮೊದಲನೇ ಪದ $\frac{3}{10} \cdots a = \frac{3}{10}$

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ $\frac{1}{10}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅದರ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರುವುದರಿಂದ, $r = \frac{1}{10}$. ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಅನಂತ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ $= \frac{a}{1-r}$.

$$= \frac{3/10}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3/10}{9/19} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad .333 \ldots = \frac{1}{3}$$

(2) .332222 .... ಇದು ಒಂದು ಆವರ್ತದಶಮಾಂಶ

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{2}{10000} + \frac{2}{100000} + \ldots$$

$$= \frac{33}{100} + \frac{2}{1000} \times \left\{ 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots \right\}$$

$$= \frac{33}{100} + \frac{2}{1000} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} \quad \left[1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots \right.$$

ಒಂದು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿ

$$\left. a = 1, \ r = \frac{1}{10} \cdot \quad \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} \right]$$

$$= \frac{33}{100} + \frac{2}{1000} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}}$$

$$= \frac{33}{100} + \frac{2}{1000} \cdot \frac{10}{9} = \frac{33}{100} + \frac{2}{900}$$

$$= \frac{297 + 2}{900} = \frac{299}{900}$$

.33222 .... ಈ ಆವರ್ತದಶಮಾಂಶ $\frac{299}{900}$ ಈ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

$$\text{ಈಗ } .99999 \ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots$$

$$= \frac{9}{10}\left\{1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} \quad \ldots\right\}$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1$$ ಆದ್ದರಿಂದ

.2374 ಮುಂತಾದ ಪರಿಮಿತ ಸ್ಥಾನಗಳುಳ್ಳ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು .237399999 .... ಎಂಬ ಅಪರಿಮಿತ ಸ್ಥಾನಗಳುಳ್ಳ ಆವರ್ತ ದಶಮಾಂಶಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಈಗ ಆವರ್ತವಾಗದೆ ಇರತಕ್ಕಂಥ ಅಪರಿಮಿತ ಸ್ಥಾನಗಳುಳ್ಳ ದಶಮಾಂಶ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಕರೆಯಬಹುದು.



ಈಗ g ರೇಖೆಯಮೇಲೆ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ p ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಬಿಂದು g ಮತ್ತು g+1 ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ನಡುವೆ ಇದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈಗ (g, g+1) ಅಂತರಾಳದ ಉದ್ದ, ಒಂದು ಮೂಲಮಾನ, ಈ ಅಂತರಾಳವನ್ನು ಹತ್ತು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ,

$$g, g+\frac{1}{10}, g+\frac{2}{10}, \ldots\ g+\frac{9}{10}, g+\frac{10}{10}=g+1$$

ಬಿಂದುಗಳು ಸಿಗುತ್ತವೆ. ಈಗ p ಬಿಂದು $g+\frac{k_1}{10}$ ಮತ್ತು $g+\frac{k_1+1}{10}$ ಗಳ ನಡುವೆ ಇರಬಹುದು ($k_1=0, 1, 2, 3, \ldots 9$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು). ಎಂದರೆ p ಬಿಂದು

$\left(g+\frac{k_1}{10}, g+\frac{k_1+1}{10}\right)$ ಈ, ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿರಬಹುದು. ಈ ಅಂತರಾಳದ ಉದ್ದ $\frac{1}{10}$. ಇದನ್ನು ಪುನಃ ಹತ್ತು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂತರಾಳದ ಉದ್ದ $\frac{1}{100}$. ಈಗ p ಬಿಂದು ಈ ಹತ್ತು ಅಂತರಾಳಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಅಂತರಾಳದೊಳಗೆ ಇರುವುದು. p ಯು $\left(g+\frac{k_1}{10}+\frac{k_2}{100}, g+\frac{k_1}{10}+\frac{k_2+1}{100}\right)$ ಈ ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ, ಈ ಅಂತರಾಳವನ್ನು ಪುನಃ ಹತ್ತು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉಪಅಂತರಾಳದ ಉದ್ದವೂ $\frac{1}{1000}$. ಈ ಹತ್ತು ಅಂತರಾಳಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿ p ಬಿಂದು ಇರುವುದು.

ಈಗ p ಯು $\left\{g+\frac{k_1}{10}+\frac{k_2}{100}+\frac{k_3}{1000}, \quad g+\frac{k_1}{10}+\frac{k_2}{100}+\frac{k_3+1}{100}\right\}$

ಈ ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈಗ ಈ ಅಂತರಾಳವನ್ನು ಪುನಃ ಹತ್ತು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ. ಹೀಗೆಯೇ ಮಾಡುತ್ತ ಹೋದರೆ, p ಯು ಯಾವ ಅಂತರಾಳದ ಮೊದಲನೇ ಬಿಂದುವಾಗಲೀ

ಕೊನೆಯ ಬಿಂದುವಾಗಲೀ ಆಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾದರೆ p ಯು $\frac{m}{n}$ ರೂಪದ ಎಂದರೆ ಒಂದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮನಾಗಿ ಬಿಡುವುದು. ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $\frac{m}{n}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ p ಯು

$$\left\{2+\frac{3}{10}+\frac{2}{100}+\frac{4}{1000}, \; 2+\frac{3}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}\right\}$$

ಅಂತರಾಳದ ಆದಿಬಿಂದುವಾದ $2+\frac{3}{10}+\frac{2}{100}+\frac{4}{1000}$ ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾದರೆ ಅದು $2.324 = \frac{2324}{1000}$ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮನಾಗಬೇಕಾಗುವುದು. p ಯು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದರಿಂದ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಹೀಗೆ p ಯು ಯಾವ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಸಮನಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದಿದ್ದರೂ, ಕ್ರಮಕ್ರಮವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚು ಹೆಚ್ಚು ಸಂನಿಕೃಷ್ಟವಾದ ಎರಡು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ p ಯು ಬೀಳುವಹಾಗೆ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ, ಎಂದರೆ $1, \frac{1}{10}, \frac{.1}{100}, \frac{1}{1000}$ .... ಉದ್ದಗಳುಳ್ಳ ಅಂತರಾಳಗಳೊಳಗೆ p ಯು ಬೀಳುವ ಹಾಗೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಈ p ಬಿಂದು ಸೂಚಿಸುವ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು g. k_1 k_2 k_3 .... ಎಂಬ ಅಪರಿಮಿತ ದಶಮಾಂಶ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. (non-periodic infinite decimal) ಈ ಅಪರಿಮಿತ ದಶಮಾಂಶದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪುನಃ ಪುನಃ ಆವರ್ತವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಹಾಗಾಗಬೇಕಾದರೆ ಅದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಬೇಕು, ಎಂದು ಹಿಂದೆಯೇ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಮತ್ತು ಈ

ದಶಮಾಂಶದ, k_1, k_2, k_3, ... ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿರುವ ಕ್ರಮದಿಂದ ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದು.

ಪರಿಮಿತ ಸ್ಥಾನಗಳುಳ್ಳ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನೂ, ಆವರ್ತವಾಗುವ ಅಪರಿಮಿತ ದಶಮಾಂಶಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದೆಂದು ಹಿಂದೆ ತೋರಿಸಿದೆ. (.2374 = .2373999 ....) ಆವರ್ತವಾಗುವ ಅಪರಿಮಿತ ದಶಮಾಂಶ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳೆಲ್ಲವೂ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುವೆಂದೂ ತೋರಿಸಿದೆ ಆವರ್ತವಾಗದಿರುವ ಅಪರಿಮಿತ ಸ್ಥಾನಗಳುಳ್ಳ ದಶಮಾಂಶಗಳು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಅಪರಿಮಿತ ಸ್ಥಾನಗಳುಳ್ಳ ದಶಮಾಂಶಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯವೇ ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮೂಹಕ್ಕೆ ಸಮನೆಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ನಿಗೂಢಾಂತರಾಳ ಸಂಹತಿ (nest of intervals)

ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೂ ನೋಡಬಹುದು.

l ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ p ಯು ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾದರೆ, p ಬಿಂದುವನ್ನು ಉದ್ದಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕಮ್ಮಿಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುವ ಅಂತರಾಳಗಳಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಹಿಂದೆಯೇ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ.

p ಬಿಂದುವು ಮೊದಲು $\left[\overset{x_1}{g}, \overset{y_1}{g+1}\right]$ ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿತ್ತು. ಈ ಅಂತರಾಳದ ಉದ್ದ 1.

ಅನಂತರ ಈ ಅಂತರಾಳದ ಉದ್ದವನ್ನು ಹತ್ತು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿದಾಗ, p ಬಿಂದುವು $\left\{\overset{x_2}{g+\frac{k_1}{10}}, \overset{y_2}{g+\frac{k_1+1}{10}}\right\}$ ಈ ಅಂತರಾಳ

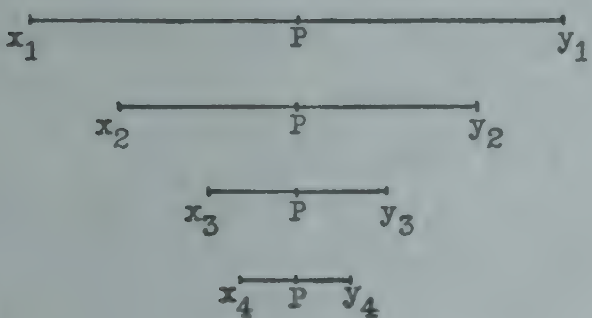
ದಲ್ಲಿತ್ತು. ಈ ಅಂತರಾಳದ ಉದ್ದ $\frac{1}{10}$ ಇದರ ಉದ್ದವನ್ನು ಪುನಃ ಹತ್ತು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದಾಗ, p ಬಿಂದುವು

$$\left(x_3 = g + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{100}, \quad y_3 = g + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2+1}{100} \right)$$

ಈ ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿತ್ತು. ಇದರ ಉದ್ದ $\frac{1}{100}$. ಈ ಅಂತರಾಳವನ್ನು ಪುನಃ ಹತ್ತು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದಾಗ p ಬಿಂದು,

$$\left(x_4 = g + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{100} + \frac{k_3}{1000}, \quad y_4 = g + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{100} + \frac{k_3+1}{1000} \right)$$

ಈ ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿತ್ತು. ಇದರ ಉದ್ದ $\frac{1}{1000}$



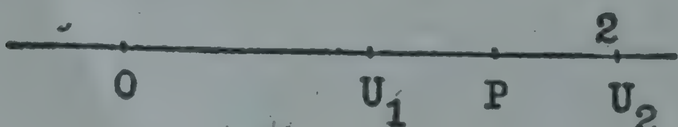
$[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $[x_3, x_3]$, $[x_4, y_4]$, ..., $[x_n, y_n]$ ಇವುಗಳನ್ನು ಒಂದು ನಿಗೂಢ ಅಂತರಾಳಗಳ ಸಂತತಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. $[x_1, y_1]$ ಅಂತರಾಳದೊಳಗೆ $[x_2, y_2]$ ಅಂತರಾಳ ಇದೆ. ಈ $[x_2, x_2]$ ಅಂತರಾಳದೊಳಗೆ $[x_3, x_3]$ ಅಂತರಾಳ ಇದೆ. ಮುಂದೆ ಬರುವ ಅಂತರಾಳ ಹಿಂದಿನ ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿ ಅಡಗಿರುತ್ತದೆ

ಅಥವಾ ನಿಗೂಢವಾಗಿದೆ ಇವುಗಳ ಉದ್ದಗಳೂ ಕೂಡ ಕ್ರಮವಾಗಿ $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ .... ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಮನಾಗುತ್ತ ಬರುವುದರಿಂದ ಈ ನಿಗೂಢ ಅಂತರಾಳಗಳೊಳಗೆಲ್ಲ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು ಮಾತ್ರ ಅಡಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವೆಂದೂ ಅದು p ಬಿಂದುವೇ ಆಗಿರಬೇಕೆಂದೂ ಊಹಿಸಬಹುದು. ಇಂಥ ಅಂತರಾಳಗಳ ಗುಂಪನ್ನು ಒಂದು ನಿಗೂಢ ಅಂತರಾಳ ಸಂಹತಿ (nest of intervals) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಂಥ ಸಂಹತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರಾಳಗಳ ಕೊನೆಯ ಬಿಂದುಗಳಾದ $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots x_n, y_n$ ಎಲ್ಲವೂ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ. ಈ ಎಲ್ಲ ಅಂತರಾಳಗಳಿಗೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು ಮಾತ್ರ ಇರಲು ಸಾಧ್ಯವೆಂಬುದು ರೇಖಾಗಣಿತದ ಮೂಲಭೂತ ಅಂಗೀಕೃತ ಭಾವನೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ನಿಗೂಢ ಅಂತರಾಳ ಸಂಹತಿಯೆಂದರೆ p ಬಿಂದುವೇ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. p ಬಿಂದು ಸೂಚಿಸುವ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು q ಆದರೆ $(Op = q)$, $q = (x_n/y_n)$. (x_n/y_n) ಈ ಗುರುತು q ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ನಿಗೂಢ ಅಂತರಾಳ ಸಂಹತಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು.

ಈ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳನ್ನು $\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ವಿಶದಪಡಿಸೋಣ.

$$1^2=1 \quad \text{ಮತ್ತು} \quad 2^2=4$$

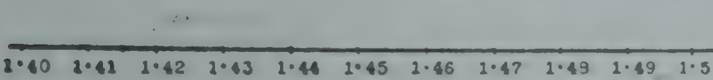
ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{2}$ ರ ಬೆಲೆ 1 ಮತ್ತು 2 ರ ನಡುವೆ ಇರಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ $OP=\sqrt{2}$ ಇದ್ದರೆ, p ಬಿಂದು [1, 2] ಅಥವಾ $[x_1, y_1]$ ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿರುವುದು. ಈ ಅಂತರಾಳದ ಉದ್ದ 1, $x_1=1$, $y_1=2$ ಈಗ [1, 2] ಅಂತರಾಳವನ್ನು ಹತ್ತು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂತರಾಳದ ಉದ್ದ $\frac{1}{10}$





ಈಗ $1.4^2=1.96 < 2$ $1.5^2=2.25 > 2$
ಆದ್ದರಿಂದ p ಬಿಂದು 1.4 ಮತ್ತು 1.5 ಈ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ [1.4, 1.5] ಅಥವಾ

$[x_2, y_2]$ $\left.\begin{matrix} x_2=1.4 \\ y_2=1.5 \end{matrix}\right\}$ ಈ ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿರುವುದು. ಈ ಅಂತರಾಳದ ಉದ್ದ $\frac{1}{10}$. ಈ ಅಂತರಾಳವನ್ನು ಪುನಃ ಹತ್ತು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂತರಾಳದ ಉದ್ದವೂ $\frac{1}{100}$ ಆಗುತ್ತದೆ.



(ಉದ್ದವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ತೋರಿಸಿದೆ)

ಈಗ $1.41^2=1.9881 <2$, $1.42^2=2.0164 >2$
ಆದ್ದರಿಂದ p ಬಿಂದು 1.41 ಮತ್ತು 1.42 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವುದು ಅಥವಾ [1.41, 1.42] ಅಥವಾ $[x_3, y_3]$

$$x_3=1.41,\ y_3=1.42$$

ಈ ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿರುವುದು. ಈ ಅಂತರಾಳದ ಉದ್ದ $\frac{1}{100}$. ಈಗ ಈ [1.41, 1.42] ಅಂತರಾಳವನ್ನು ಪುನಃ ಹತ್ತು ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ,



ಈಗ $1.414^2=1.999396 <2$

$1.415^2 = 2.002225 > 2$ ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{2}$ ನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ p ಬಿಂದು 1.414 ಮತ್ತು 1.415 ಈ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವುದು ಅಥವಾ [1.414, 1.415] ಅಥವಾ

$[x_4, y_4] \quad \left.\begin{matrix} x_4 = 1.414 \\ y_4 = 1.415 \end{matrix}\right\}$

ಈ ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿರುವುದು. ಈ ಅಂತರಾಳದ ಉದ್ದ $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$.

ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತ ಹೋದರೆ, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6} .... ಉದ್ದವಿರುವ (x_5, y_5), (x_6, y_6), (x_7, y_7), ..., (x_n, y_n), ... ಅಂತರಾಳಗಳಲ್ಲಿ p ಬಿಂದು ಇರುವುದು.

ಈಗ $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $[x_3, y_3]$ ... $[x_n, y_n]$ .... ಅಥವಾ [1,2] [1 4, 1.5], [1 41, 1.42], [1.414, 1 415] .... ಒಂದು ನಿಗೂಢ ಅಂತರಾಳ ಸಂಹತಿ (nest of intervals). ಮುಂದೆ ಬರುವ ಒಂದು ಅಂತರಾಳದಲ್ಲಿ ಅನಂತರ ಬರುವ ಎಲ್ಲ ಅಂತರಾಳಗಳೂ ಹುದುಗಿರುತ್ತವೆ. ಎಲ್ಲ ಅಂತರಾಳಗಳಿಗೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾದ p ಎಂಬ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು ರೇಖಾಗಣಿತದ ಮೂಲಭೂತ ಸ್ವೀಕೃತ ಭಾವನೆಯಿಂದ ಇರುವುದಾಗಿ ತಿಳಿದುಬಂದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದರೆ ಈ ನಿಗೂಢ ಅಂತರಾಳ ಸಂಹತಿಯೆಂದೇ ಹೇಳಬಹುದು.

$\sqrt{2} = (x_n / y_n)$ ಇದೊಂದು ಅಪರಿಮಿತ ಸ್ಥಾನಗಳುಳ್ಳ ದಶಮಾಂಶವೆಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ, ಆಗ $\sqrt{2} = 1.414$ ....

ಈ ದಶಮಾಂಶದಲ್ಲಿ ಮುಂದುಮುಂದೆ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿರುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತ ಮುಂದುವರಿಯಬೇಕು.

ಪರಿಮಿತ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನೂ (finite decimals) ಆವರ್ತವಾಗುವ ಅಪರಿಮಿತ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನಾಗಿ (periodic infinite decimals, .2374 = .2373999 ....) ಬರೆಯಬಹುದೆಂದೂ ಎಲ್ಲ ಆವರ್ತವಾಗುವ ಅಪರಿಮಿತ ದಶಮಾಂಶಗಳೂ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೇ ಸೂಚಿಸುವುವೆಂದೂ ಹಿಂದೆಯೇ ನೋಡಿದೆವು. ಈಗ ಆವರ್ತವಾಗುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪರಿಮಿತ ದಶಮಾಂಶವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಒಂದು ನಿಗೂಢ ಅಂತರಾಳ ಸಂಹತಿಯಲ್ಲಿ ಅಡಕಮಾಡಬಹುದು (ಅಡಗಿಸಬಹುದು).

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\frac{1}{3}$ = .3333 ....

ಇದು ಈ ನಿಗೂಢ ಅಂತರಾಳ ಸಂಹತಿಯಲ್ಲಿ ಅಡಗಿರುತ್ತದೆ.

(.3 . .4) (33 , .34) (333 , 334) ... .
x_1 , y_1 x_1 , y_1 x_0 , y_3

$$.3 < .33 < .333 < .... < \tfrac{1}{3}$$

$$.4 > .34 > 334 > .... > \tfrac{1}{3}$$ ಆದ್ದರಿಂದ

ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಅಂತರಾಳಗಳ ಉದ್ದ ಕ್ರಮವಾಗಿ

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{1000}, \dots$$

ಹೀಗೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತ ಶೂನ್ಯದತ್ತ ಸಾಗುವುದು ($\longrightarrow$o)

$$\tfrac{1}{3} = (x_n / y_n.)$$

ಈ ನಿಗೂಢ ಅಂತರಾಳ ಸಂಹತಿ $\frac{1}{3}$ ಎಂಬ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೇ ಸೂಚಿಸುವುದು.

ಪರಿಮೇಯ ಮತ್ತು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೈಜಸಂಖ್ಯೆ (real numbers) ಗಳೆಂದು ಕರೆದೆವು. ನೈಜಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದರೆ ಒಂದು

ನಿಗೂಢ ಅಂತರಾಳ ಸಂಹತಿ ಎಂದು ಅರ್ಥಮಾಡಬಹುದು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನಿಗೂಢ ಅಂತರಾಳ ಸಂಹತಿ ಒಂದು ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಪರಿಮೇಯವಾಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬಹುದು.

ಹೀಗೆ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಂಪಿಗೆ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ವಿಸ್ತರಿಸಿ ವಿಸ್ತೃತ ಸಂಖ್ಯಾಸಮೂಹದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಕರೆದೆವು. ಈ ವಿಸ್ತೃತ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಮುಚ್ಚಯದಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ, ಗುಣನ ಮುಂತಾದ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಅರ್ಥಗಳನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿದರೆ, ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸರಿಹೋಗುತ್ತಿದ್ದ ಸಂಕಲನ, ಗುಣನಗಳ ವ್ಯತ್ಯಯ ನಿಯಮ, ನಿರಪೇಕ್ಷ ಸಂಯೋಗ ನಿಯಮ ಮುಂತಾದ ನಿಯಮಗಳು ವಿಸ್ತೃತ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಮುಚ್ಚಯವಾದ ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮೂಹಕ್ಕೂ ಸರಿಹೋಗುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸುವ ಗೋಜಿಗೆ ಹೋಗದೆ, ಕೆಳಗೆ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

$$q_1 = \left(x^n / y^n \right) \quad q_2 = \left(x'_n / y'_n \right),$$

$$q_3 = \left(x''_n / y''_n \right)$$

ಆದರೆ, $q_1 + q_2 = \left(\frac{x_n + x'_n}{y_n + y'_n} \right)$

$$q_1 \; q_2 = \left(x_n \; x'_n / y_n \; y'_n \right)$$

$$-q_1 = \left({-y_n} / -x_n \right), \quad \frac{1}{q_1} = \left(1/y_n / 1/x_n \right)$$

$q_1 + q_2$ ಈ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $(x_n + x_n'/y_n + y_n')$ ನಿಗೂಢ ಅಂತರಾಳ ಸಂಹತಿಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದೆ.

ಹೀಗೆ ಸಂಕಲನ, ಗುಣನ ಮುಂತಾದ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಅರ್ಥ ಕಲ್ಪಿಸಿದಾಗ ಕೆಳಗೆ ಬರೆದಿರುವ ನಿಯಮಗಳು, q_1, q_2, q_3 ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ (real numbers) ಸರಿಹೋಗುತ್ತವೆ.

$$q_1+q_2 = q_2+q_1$$

$$(q_1+q_2) + q_3 = q_1+(q_2+q_3)$$

$$q_1 q_2 = q_2 q_1$$

$$(q_1 q_2) q_3 = q_1 (q_2 q_3)$$

$$q_1 (q_2+q_3) = q_1 q_2+q_1 q_3$$

ಡೆಡಿಕಿಂಡ್‌ನ ರೇಖಾಭೇದಗಳು (Dedekind's cut)

ರಿಚರ್ಡ್ ಡೆಡಿಕಿಂಡ್ ಎಂಬ ಪ್ರಸಿದ್ಧನಾದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ.

ಎಲ್ಲ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಸಮುಚ್ಚಯಗಳಾಗಿ (sets) ವಿಂಗಡಿಸುವ ಒಂದು ಕ್ರಮವಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ B ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ A ಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ. ಈಗ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಇಂಥ ವರ್ಗೀಕರಣ ಅವುಗಳ ಒಂದು ಭೇದವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದು. ಈಗ ಕೆಳಗೆ ಬರೆದಿರುವ ಮೂರು ನಿಯಮಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಮಾತ್ರ ಇಂತಹ ಭೇದಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸುವುದು.

(1) A ಎಂಬ ಸಮುಚ್ಚಯದಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಧಿಕವಾದ ಒಂದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆ: ಮೂರಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದ ಮತ್ತು ಮೂರಕೆ ಸಮನಾದ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲವೂ A ಸಮುಚ್ಚಯಕ್ಕೆ ಸೇರು

ವಂತೆಯೂ, ಮೂರಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು B ಯಲ್ಲಿರುವಂತೆಯೂ ಛೇದವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿದರೆ, ಈಗ A ಯಲ್ಲಿರುವ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ 3.



(2) B ಎಂಬ ಸಮುಚ್ಚಯದಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದ ಒಂದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವುದು.

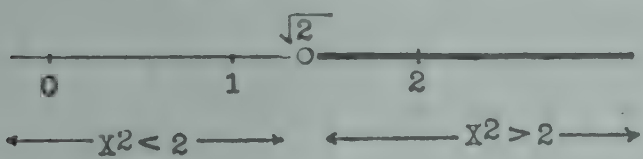
ಉದಾ: 2ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲ A ಯಲ್ಲಿಯೂ 2ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದ ಅಥವಾ 2ಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲ B ಯಲ್ಲಿಯೂ ಇರುವ ಛೇದವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿದರೆ, B ಯಲ್ಲಿರುವ ಅತ್ಯಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ 2.



(3) A ಯಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಹೆಚ್ಚಾದ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ, B ಯಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾ: ಎಲ್ಲ ಋಣಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಯಾವ ಧನಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳು 2ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವವೋ ಅಂಥ ಧನಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ A ಯಲ್ಲಿರುವಂತೆಯೂ, ವರ್ಗಗಳು 2ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವಂಥ ಧನಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು B ಯಲ್ಲಿರುವಂತೆಯೂ ಛೇದವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿದರೆ, ಈಗ A ಯಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಅಧಿಕವಾದ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. B ಯಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಇರಲಾರದು. ಇಂಥ ಛೇದ ಒಂದು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದೆಂದೂ, (1) ಮತ್ತು

(2)ನೇ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಛೇದಗಳು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುವೆಂದೂ ಡೆಡಿಕಿಂಡ್ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಮಾಡಿದ. (1) ನೇ ಛೇದ 3 ಎಂಬ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. (2) ನೇ ಛೇದ 2 ಎಂಬ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದು. (3) ನೇ ಛೇದ $\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.



ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಪ್ರಕಾರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಛೇದವೂ ಒಂದು ನೈಜ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು (real number) ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. A ಯಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಹೆಚ್ಚಾದ ಮತ್ತು B ಯಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಒಂದೇ ಛೇದದಲ್ಲಿರುವ ನಾಲ್ಕನೇ ವಿಕಲ್ಪ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. a ಎಂಬ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ A ಯಲ್ಲಿರುವ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಾದ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು, B ಯಲ್ಲಿರುವ b ಎಂಬ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಅತ್ಯಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, $\frac{a+b}{2}$ ಎಂಬ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು a ಮತ್ತು b ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವುದರಿಂದ, ಅದು A ಯಲ್ಲಿಯೂ ಸೇರುವುದಿಲ್ಲ B ಯಲ್ಲಿಯೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಎಲ್ಲ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ A ಅಥವಾ B ಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂಬ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ಈಗ ಸುಳ್ಳಾಗುವುದು.

ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (imaginary numbers)

ಹೀಗೆ ಪರಿಮೇಯ ಮತ್ತು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭಾವನೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸಿದಮೇಲೆ $x^2-2=0$; $x^2-3=0$ ಮುಂತಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ, $x=\sqrt{2}$, $x=\sqrt{3}$ ಮುಂತಾದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು.

$(-1)(-1)=+1$ ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಾಡಿದುದರಿಂದ, ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಲೀ, ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಲೀ ಒಂದು ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವರ್ಗಮಾಡಿದಾಗ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿಯೇ ಇರುವುದು. $(-1)^2 = 1$; $(-2)^2 = 4$; $(3)^2=9$.

ಈಗ ಯಾವ ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವರ್ಗಗೊಳಿಸಿದರೂ -4 ಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಲಾರದು. ಆದ್ದರಿಂದ $x^2= -4$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸರಿಹೋಗುವ x ಎಂಬ ನೈಜಸಂಖ್ಯೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ $x=2$ ಅಥವಾ $x= -2$ ಆಗುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ,

$$x^2=(-2)^2=4 \quad , (x=2 \text{ ಆದರೆ})$$

$x= -2$ ಆದರೆ $x^2=(-2)^2=4$ ಹೀಗೆಯೇ $x^2+9=0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸರಿಹೋಗುವ x ಎಂಬ ಬೆಲೆ ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಹೀಗೆಯೇ $x^2+1=0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಶಾಸ್ತ್ರದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕಲ್ಪನೆ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಎಲ್ಲ ಆವಶ್ಯಕತೆಗಳನ್ನು ಪೂರೈಸಲು ಅಸಮರ್ಥವಾಯಿತು. ಈಗ $x^2+1=0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ $x^2= -$ ಆದ್ದರಿಂದ $x=\sqrt{-1}$ ಇದು ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ, ಇದನ್ನು i ಎಂಬ ಗುರುತಿನಿಂದ ಸೂಚಿಸೋಣ, $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$ ಆಗುವಂತೆ i ಗುರುತಿಗೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನ ಮಾಡಿದರೆ, $x=i$ ಎಂಬ ಬೆಲೆ $x^2+1=0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸರಿಹೋಗುವುದು $i^2+1=-1+1=0$. ಎಣಿಸುವುದಕ್ಕೂ i ಎಂಬ ಗುರುತಿಗೂ ಯಾವ ಸಂಬಂಧವೂ ಇಲ್ಲ

ಈಗ $2i, 3i, -i$ $3+4i$ $-5i$ ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಿ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (imaginary numbers) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ $2i, 3i, -4i$ ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಶುದ್ಧಕಾಲ್ಪನಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದೂ (purely imaginary) $3+4i$. $4-5i$ ಮುಂತಾದ ಸಂಖ್ಯೆ

ಗಳನ್ನು ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದೂ (complex numbers) ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. a ಮತ್ತು b ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ, $a+ib$ ಯನ್ನು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ a ಎಂಬುದು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯ ನೈಜಭಾಗ (real part). b ಎಂಬುದು ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಭಾಗ (imaginary part). ಈಗ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣನ ಮುಂತಾದ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು, ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೇಲೆ ಮಾಡುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೇ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. i^2 ಬಂದಾಗಲೆಲ್ಲ ಅದರ ಬದಲು -1 ಎಂಬ ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬರೆಯುವೆವು.

$$(4+5i)+(2+3i) = (4+2)+(5i+3i)$$
$$= +8i$$

$$(2-i)(3+2i) = 6+4i-3i-2i^2$$
$$= 6+4i-3i-2(-1)$$
$$= 6+4i-3i+2$$
$$= (6+2)+(4i-3i)$$
$$= 8+i$$

ಈ ಅಭಿಪ್ರಾಯಗಳ ಆಧಾರದಮೇಲೆ, ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನ, ಗುಣನ ಮುಂತಾದ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಕಂಡಹಾಗೆ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

ಈಗ $(a+ib)(a-ib) = a^2-iab+iab-i^2b^2$
$$=a^2+b^2 \qquad (i^2=-1)$$

ಆದ್ದರಿಂದ $a+bi$ ರೂಪದ ಎರಡು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಸಂಕಲನ, ಗುಣನಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಮುಚ್ಚಯ ಪರಿಪೂರ್ಣವಾಗಿದೆ

ಎನ್ನಬಹುದು ಈಗ ವ್ಯವಕಲನ, ಭಾಗಹಾರಗಳಿಗೂ ಸರಿಯಾದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ.

$$(a+b\,i) - (c+d\,i) = (a-c) + (b-d)\,i$$

$$\frac{a+b\,i}{c+d\,i} = \frac{(a+b\,i)}{(c+d\,i)} \cdot \frac{(c-d\,i)}{(c-d\,i)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$= \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$$

$c^2+d^2=0$ ಆದಾಗ, $c=0$, $d=0$

ಈಗ $c+d\,i=0+0\,i=0$

ಈಗಲೂ $c+d\,i$ ಶೂನ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾದರೆ

$\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}$, $\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$ ಇವುಗಳಿಗೆ ಅರ್ಥವಿಲ್ಲದುದರಿಂದ, ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಭಾಗಹಾರ ಮಾಡುವುದನ್ನು ನಿಷೇಧಿಸಿದೆ.

ಈಗ $z_1=a+b\,i$, $z_2=c+d\,i$, $z_3=e+f\,i$ ಮೂರು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ, ಮೇಲೆ ವಿವರಿಸಿದ ಸಂಕಲನ ಮುಂತಾದ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಹಿಂದಿನಂತೆಯೇ ಕೆಳಗೆ ಬರೆದಿರುವ ನಿಯಮಗಳು ಸರಿಹೋಗುತ್ತವೆ.

$$z_1+z_2 = z_2+z_1$$

$$(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$$

$$z_1\,z_2 = z_2\,z_1$$

$$(z_1\,z_2)\,z_3 = z_1\,(z_2\,z_3)$$

$$z_1\,(z_2+z_3) = z_1\,z_2+z_1\,z_3$$

ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಂಪನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸುತ್ತ ಹೋಗಿ ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳವರೆಗೆ ಬೆಳೆಸಿದನಂತರ ಬೀಜಗಣಿತದ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಸರಿಹೋಗುವ ಬೆಲೆಗಳು ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

$2x + 3 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣ x ಅವ್ಯಕ್ತದಲ್ಲಿ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣ. ಇಲ್ಲಿ $x = -\frac{3}{2}$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹಾಕಿದರೆ ಮಾತ್ರ ಸಮೀಕರಣ ಸರಿಹೋಗುವುದು.

$$2x+3 = 2\left(-\tfrac{3}{2}\right)+3 = (-3)+3 = 0.$$

x ಅವ್ಯಕ್ತಕ್ಕೆ ಇನ್ನು ಯಾವ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹಾಕಿದರೂ ಸರಿಹೋಗಲಾರದು. $x = -\frac{3}{2}$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು $2x+3=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, $ax+b=0$ ಎಂಬ ಏಕಘಾತ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ $x=-\frac{b}{a}$ ಎಂಬ ಒಂದೇ ಒಂದು ಮೂಲವಿರುವುದು.

a, b ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ, $-\frac{b}{a}$ ಎಂಬುದು ನೈಜಸಂಖ್ಯೆ.

$x^2-5x+6=0$ ಎಂಬುದು x ನಲ್ಲಿ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ ಎಂದರೆ ಎರಡನೆಯ ಘಾತದ ಸಮೀಕರಣ. ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ $x=2$ $=3$ ಎಂಬ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳೂ ಸರಿಹೋಗುವವು.

$x=2$ ಆದರೆ $x^2-5x+6 = 2^2-5\cdot 2+6 = 4-10+6 = 0$

$x=3$ ಆದರೆ $x^2-5x+6 = 3^2-5.3+6 = 9-15+6 = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ $x^2-5x+6=0$ ಎಂಬ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ $x=2, x=3$ ಎಂಬ ಎರಡು ಮೂಲಗಳಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ಎಲ್ಲ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೂ ಎರಡು ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಮೂಲ ಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

$ax^2+bx+c=0$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ವರೂಪ. ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸರಿಹೋಗುವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ಎಂಬ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು.

$x^2-5x+6=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು
$a\,x^2+b\,x+c=0$ ಸಮೀಕರಣದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದರೆ,
$a=1, b=-5, c=6$. ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು
$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದರೆ

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm1}{2}$$

$$x=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3 \text{ ಅಥವಾ } x=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$\therefore$ $x=3, x=2$ ಬೆಲೆಗಳು $x^2-5x+6=0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು. ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಸರಿಹೋಗುವ x ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ಊಹ್ಯಸಂಖ್ಯೆ ಗಳ ಭಾವನೆ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿಲ್ಲದೇ ಇದ್ದರೆ, $ax^2+bx+c=0$ ರೂಪದ ಎಲ್ಲ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೂ ಎರಡು ಮೂಲಗಳು ಇದ್ದೇ ಇರುವುವು ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4a\,c}}{2\,a}$

ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $b^2 - 4ac$ ಯು ಬೆಲೆ ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ ಊಹ್ಯಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವುದು.

ಆಗ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಎಂಬ x ನ ಬೆಲೆಗಳು, ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ: $x^2 - 4x + 13 = 0$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $a = 1$ $b = -4$ $c = 13$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$

$x^2 - 5x + 6 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ $2 + 3i$ ಮತ್ತು $2 - 3i$ ಆಗಿವೆ. ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭಾವನೆಯೂ ಉತ್ಪನ್ನವಾದನಂತರವೇ $ax^2 + bx + c = 0$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಎರಡು ಮೂಲಗಳು ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತವೆ ಎಂದೂ, ಅವು ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಥವಾ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದೂ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು.

ಹೀಗೆಯೇ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ಎಂಬ ಘನಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮೂರು ಮೂಲಗಳಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ ಎಂಬ ಚತುರ್ಘಾತ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ನಾಲ್ಕು ಮೂಲಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಮೂಲಗಳು ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಥವಾ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ವ್ಯಾಪಕವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ,

$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ
$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$
n ಘಾತಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ n ಮೂಲಗಳು ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತವೆಯೆಂದೂ, ಈ ಮೂಲಗಳು ನೈಜಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಬಹುದೆಂದೂ ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಹೀಗೆ ಪದಾರ್ಥಗಳ ಎಣಿಕೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಉದ್ಭವವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭಾವನೆ ವ್ಯವಹಾರದ ಆವಶ್ಯಕತೆಗಳಿಂದಲೂ, ಶಾಸ್ತ್ರದ ಬೆಳೆವಣಿಗೆಯ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದಲೂ ಸುಧಾರಿತವಾಗಿ ತನ್ನ ಇತಿಹಾಸವನ್ನು ಪರಿಷ್ಕಾರವಾಗಿ ರೂಪಿಸಿಕೊಂಡಿದೆ. ಇಂಥ ಸುಭದ್ರವಾಗಿ ರೂಪಿತವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ತಳಹದಿಯ ಮೇಲೆ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಭವ್ಯಭವನ ನಿರ್ಮಿತವಾಗಿದೆ.

ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಸೂಚೀ

ಅಂಕ	number
ಅಂಗೀಕೃತ ಭಾವನೆ	postulate
ಅಂತರಾಳ	interval
ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆ	successor
ಅನಪವರ್ತ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ	prime number
ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ	indeterminate
ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ	irrational number
ಅಪರಿಮಿತ ಸ್ಥಾನವುಳ್ಳ ದಶಮಾಂಶ	infinite decimal
ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ	prime number
ಆವರ್ತ ದಶಮಾಂಶ	periodic decimal
ಉಪಅಂತರಾಳ	sub-interval
ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ	imaginary number
ಕ್ಷೇತ್ರ	field
ಗಣಿತದ ಅನುಮಿತಿ ಕ್ರಮ	method of mathematical induction
ಗುಣನ ತತ್ವ	multiplicative principle
ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿ	geometric progression
ಡೆಡಿಕಿಂಡನ ಛೇದ	Dedikind's cut
ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿ; ದಾಶಮಿಕ ಕ್ರಮ	decimal system
ದ್ವಾದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿ	duo-decimal system
ದ್ವಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿ	binary system
ನಿರಪೇಕ್ಷ ಸಂಯೋಗ ನಿಯಮ	associative law
ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ	natural number
ಪಂಚಮಾನ ಪದ್ಧತಿ	quinary system

ಪರಿಮಿತ ಸ್ಥಾನಗಳುಳ್ಳ ದಶಮಾಂಶ	terminating decimal
ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ	rational number
ಮಣಿಕಟ್ಟು	abacus
ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆ	complex number
ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ	quadratic equation
ವಿತರಣ ನಿಯಮ	distributive law
ವ್ಯತ್ಯಯ ನಿಯಮ	commutative law
ಸಂಕಲನ ತತ್ವ	additive principle
ಸಪ್ತಮಾನ ಪದ್ಧತಿ	septimal system
ಸಮಸಂಖ್ಯೆ	even number
ಸಂಯೋಗ ನಿಯಮ	associative law
ಸಂವೃತ ಅಂತರಾಳ	closed interval

ಒಪ್ಪೋಲೆ

ಪುಟ	ಸಾಲು	ಇರುವುದು	ಇರಬೇಕಾದದ್ದು
42	23	ಚಾತಾ :	ಜಾತಾ :
48	ಶ್ಲೋಕದಲ್ಲಿ	ನಞ	ನಞಾ
49	ಕೊನೆಯ ಸಾಲು	ದೇಶಕರು	ದೇಶಿಕರು
50	ಶ್ಲೋಕದಲ್ಲಿ	ಪೃಥಿಕರಣಭಿವಾ	ಪೃಥಿಕರಣಭಿದಾ
50	,,	ನಾಲ್ವಸಾರ್ಕೈ :	ನಾಲ್ಪಸಾರ್ಕೈ:
52	8	ಅಧಿ	ಅದ್ರಿ
53	ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ	ಣ ↓ 16	ಣ ↓ 15
56	,,	ಜು	ಜ್
57	10	ಗಳಿಸಿತು	ಗಳಿಸಿದುವು.
57	11	ಜನಭಿಪ್ರಾಯ	ಜನಾಭಿಪ್ರಾಯ
60	17	2, 4 42	2, 4, 42
61	14	ಗಣಿತಜಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು	ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು.
61	18	ಇಪ್ಪತ್ತೊಂಬತ್ತು	ನಲವತ್ತೇಳು
61	19	ಇಪ್ಪತ್ತೊಂಬತ್ತು	ನಲವತ್ತೇಳು
64	15	8 7 84	8781
64	16	140832	14929
64	17	8784	8781
66	20	ಆರು	ಏಳು
69	10	66 ನ್ನು	7 ನ್ನು
75	11	(1) 0.4	(1) 4
78	19	Naper	Napier
89	13	$3>5$	$3<5$
94	5	ಬೆಸಸಂ,	ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ
98	18	ಊಹಿಸೆದ್ದೆವು	ಊಹಿಸಿದ್ದೆವು.

ಪುಟ	ಸಾಲು	ಇರುವುದು	ಇರಬೇಕಾದದ್ದು
103	9	ಉಪಭಾಗಳ	ಉಪಭಾಗಗಳ
104	4	$\frac{ad \times bc}{bd}$	$\frac{ad + bc}{bd}$
121	7	u_1 , v_2	u_2 , v_2
124	6	$[-3 , 4]$	$[-3 , -4]$
125	18	$\frac{a}{ರ - 1}$	$\frac{a}{1 - ರ}$

ಪ್ರಸಾರಾಂಗ
ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ
೧೯೭೧